

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

APRENDIZAJE COLABORATIVO Y ERRORES ALGEBRAICOS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

COLLABORATIVE LEARNING AND ALGEBRAIC ERRORS: A DIDACTIC PROPOSAL FOR LEARNING ALGEBRA

Willian Armando Ramos-Canché¹, Isabel Tuyub-Sánchez², Raúl Antonio Aguilar-Vera³

¹Universidad Autónoma de Yucatán, México (willianramoscanche@hotmail.com), ²Universidad Autónoma de Yucatán, México (isabel.tuyub@correo.uady.mx), ³Universidad Autónoma de Yucatán, México (avera@correo.uady.mx)

Publicado el 24 de marzo de 2014

Cómo citar: Ramos-Canché, W. A., Tuyub-Sánchez, I. y Aguilar-Vera, R. A. (2014). Aprendizaje colaborativo y errores algebraicos: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra. *Educación y Ciencia*, 3(41), 43-55.

Resumen

El presente artículo describe la experiencia de un trabajo de investigación en la que se desarrolló una propuesta didáctica para apoyar al aprendizaje del Álgebra, construida bajo dos ejes: 1) los errores algebraicos comunes; 2) Diseños con aprendizaje colaborativo. Cuya pertinencia se probó mediante su implementación con un grupo de preuniversitarios de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. El estudio constó de tres partes: Implementación de una evaluación diagnóstica, para determinar el estado de error que tiene la población; implementación de la propuesta basada en los ejes anteriores y una evaluación final para hacer un estudio comparativo del grado de avance de los estudiantes con respecto al cometimiento de los tipos de errores.

Palabras clave: aprendizaje colaborativo; preuniversitarios; errores algebraicos; propuesta didáctica

Abstract

This article describes the experience of a research paper in which a didactic proposal was developed to support the learning of algebra, built under two axes: 1) common algebraic errors; 2) Collaborative learning designs. Whose relevance was tested through its implementation with a group of pre-University of the Mathematics Faculty of the Universidad Autónoma de Yucatán. The study consisted of three parts: implementation of a diagnostic assessment to determine the error status with the population; implementation of the proposal based on the previous axis and a final evaluation to make a comparative study of the degree of progress of students with regard to the demand of the types of errors.

Keywords: collaborative learning; pre-university; algebraic errors; didactic proposal

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas que enfrentan las Instituciones de Educación Superior en México, es la baja eficiencia terminal; a pesar de que en las últimas décadas se ha incrementado el número de alumnos que acceden a la Educación Superior, dicho incremento no se corresponde con el de egreso (SEP, 2006); en particular, en el área de ciencias exactas e ingenierías, la tasa de egreso es mucho menor que en otras áreas (Aparicio, Jarero y Ordaz, 2011).

La Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (FMAT-UADY) que ofrece programas educativos en las áreas de Matemáticas y Computación; en los últimos veinte años ha enfrentado problemas de reprobación y rezago escolar, principalmente en las asignaturas básicas o las denominadas de tronco común, principalmente en asignaturas como Cálculo y Álgebra (Aparicio,

2006; García y Aparicio, 2007). Así mismo, Mukul y Jarero (2010) enfatizan que dicha universidad presenta altos porcentajes de reprobación en los primeros cursos, en particular mencionan la asignatura de Álgebra.

Ante la reprobación y el rezago escolar, desde el 2005 la FMAT-UADY puso en marcha una prueba diagnóstica que identifique estudiantes de nuevo ingreso (preuniversitarios) que no cuentan con los conocimientos y habilidades matemáticas mínimas requeridas en sus cursos de tronco común, para sugerirles participar en un taller de nivelación en Matemáticas diseñado por la misma institución con la intención de contribuir en la disminución de la reprobación.

Particularmente, se ha reportado que la falta de conocimientos y habilidades para el área del Álgebra puede representar una de las posibles causas de reprobación en otras ramas, por servir como instrumento para su estudio (Pacheco, 1997). Considerando el impacto que tiene dichos conocimientos y habilidades en esta área, se realizó un diseño de una propuesta didáctica que pretende disminuir errores algebraicos a partir de la confrontación de éstos en preuniversitarios. Dicho diseño se piloteó en el taller de nivelación impartido por la FMAT-UADY al grupo de estudiantes que tuvo la menor calificación en el diagnóstico.

El impacto de esta investigación no sólo radica en la posibilidad de disminuir errores en los estudiantes, sino que, debido a ello, los estudiantes, en otras asignaturas, puedan enfocarse a las nociones que deben aprender y no obstaculizarse debido a errores algebraicos que puedan “arrastrar”.

Para el diseño de la propuesta se consideraron dos nociones teóricas básicas: el entendimiento de qué es un error algebraico y la intención de generar un aprendizaje colaborativo. Por lo que se describe a continuación dichas nociones.

Errores algebraicos

Desde el punto de vista matemático, “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 69); ya que normalmente los reactivos y problemas que se les presentan a los estudiantes están definidos de tal manera que las soluciones esperadas resultan ser únicas o, en su defecto, tienen un rango único de respuesta, aquellas respuestas diferentes a las esperadas son consideradas incorrectas. En el caso del Álgebra se denominan *errores algebraicos*; los cuales algunas veces son considerados como deficiencias en el sistema de enseñanza y aprendizaje

La importancia del estudio de éstos radica en que son muestra clara de que por causa de ellos se dificulte que los estudiantes se apropien de los conocimientos de otras materias en la escuela, por ejemplo, nociones de Cálculo. Sin embargo, hoy día, el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje, pues, por ejemplo, el análisis de los errores algebraicos puede contribuir a ayudar al docente en la organización de estrategias para un mejor aprendizaje y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección a favor del aprendizaje (Engler, Grgorini, Muller, Vrancken y Hecklein, 2004).

Por lo que se debe de dejar de penalizar el error, como mencionan Del Puerto y Minnaard (2004), para convertirse en una fuente de información que muestra una posible reorientación del proceso de enseñanza y aprendizaje; así mismo, debe considerarse como un recurso de motivación, una oportunidad para que el alumno argumente, discuta y ponga en tela de juicio sus conocimientos, para así lograr una mejor comprensión de los contenidos matemáticos en juego.

De ahí la pertinencia de utilizar los errores algebraicos que comúnmente se cometen, como elementos que sirvan como punto de partida para el diseño de actividades encausadas a apoyar al aprendizaje del Álgebra de los preuniversitarios, otorgándoles la oportunidad de argumentar, discutir y evaluar los conocimientos que poseen.

Aprendizaje colaborativo

Existen diversas corrientes teóricas sobre el aprendizaje que destacan las maneras en las que este puede darse, no obstante, en este trabajo se está de acuerdo con Baquero (2002), referido por Díaz Barriga (2003), al concebirlo como aquellos cambios en la comprensión y participación del alumno que surgen del trabajo en una actividad conjunta, a través de la reacción ante alguna situación, instrucción, razonamiento, experiencia u observación. De esta caracterización del aprendizaje, se resalta que surge del trabajo en actividades conjuntas, en las que las interacciones y el intercambio de ideas y experiencias forman parte importante durante el proceso. Dicho esto, el *aprendizaje colaborativo* parece ajustarse y cubrir las necesidades para la confrontación de los errores algebraicos con los preuniversitarios, debido a que la reflexión y concientizarse de ellos permite evitarlos.

Por lo que se optó por diseñar las actividades que conforman la propuesta bajo las consideraciones establecidas por este paradigma, el cual se define como una situación en la que se espera que ocurran formas particulares de interacción entre las personas del grupo colaborativo, que podrían activar mecanismos de aprendizaje; a través de la ocurrencia de diversos tipos interacción (Dillembourg, 1999). Sobre estos mecanismos, los hermanos Jhonson y Holubec (1999), citado por Alfageme (2003), proporcionan cinco rasgos básicos que garantizan que exista colaboración y hacen que esta pueda funcionar en la práctica en formas eficiente:

- Interdependencia positiva. Es el elemento central del aprendizaje colaborativo, crea un compromiso con el éxito de otras personas, además del propio.
- Responsabilidad individual. Es el cumplimiento de las obligaciones individuales asumiendo la responsabilidad de alcanzar sus metas como grupo, no rivaliza con el trabajo en grupo, por el contrario, aquello que el estudiante realiza en grupo puede y debe dar cuenta en forma individual.
- Habilidades cognitivas interpersonales. Los estudiantes aprenden a resolver juntos los problemas, desarrollando las habilidades de liderazgo, comunicación, confianza, toma de decisiones y solución de conflictos.
- Interacción estimuladora, preferentemente cara a cara. Se refiere a la ayuda mutuamente de forma eficiente y efectiva, ofreciendo retroalimentación para mejorar su desempeño en el futuro y analizando las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad.
- Evaluación grupal. Se entiende como la reflexión que ha de realizar el grupo de una forma continua para identificar qué acciones resultaron útiles y qué acciones no fueron adecuadas.

Sobre la interdependencia positiva, Salomón (1992) referido por Collazos y Mendoza (2006) indica que la colaboración solamente podrá ser efectiva si existe una interdependencia genuina entre los estudiantes que están colaborando, la cual es descrita como la necesidad de compartir información, de dividir el trabajo en roles complementarios y la necesidad de compartir el conocimiento en términos explícitos. También se favorece otorgando una calificación grupal y no individual (Serrano y González, 1996), proporcionando al grupo una sola copia de las actividades, presentando la información en forma de rompecabezas, formando grupos heterogéneos que compitan con otros grupos heterogéneos (Ovejero, 1990).

MÉTODO

Diseño de la propuesta

Primeramente, se estableció una categorización de errores algebraicos y un listado que englobara los más comunes (tabla 1). La categorización (figura 1) que se delimitó es la propuesta por Matz (1980).

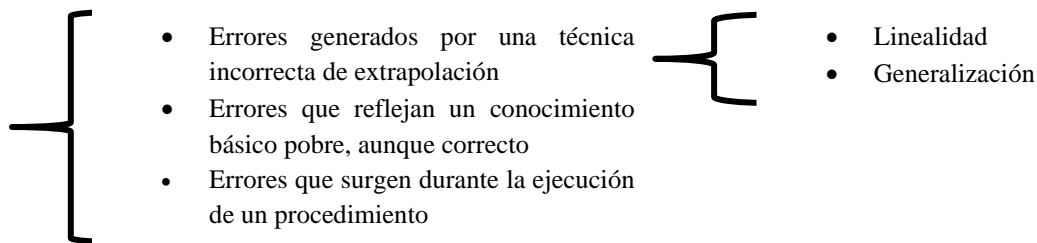


Figura 1. Categorización de errores algebraicos utilizada para la elaboración de la propuesta didáctica.

Tabla 1.

Listado de errores comunes obtenido de agregarle al propuesto por Matz (1980) referida a Tziu Collazos y Mendoza, 2006 (1992), algunos de los presentados por May (1990).

1.-Evaluar $4x$ cuando $x = 6$; 46 ; $46x$	2.- Evaluar xy cuando $x = -3$, $y = -5$: -3
3.-Al evaluar $2(-3)$ como -1 y $(-1)^3$ como -3	4.-Analizar $3r^2$ como $3 + r^2 =$ como $(3r)^2$
5.-Simplificando $3 + 23(s - 4)$ a $26(s - 4)$	6.-Simplificando $3xy + 4xz$ a $7xyz$
7.- $\frac{2a}{2a} = 0$	8.- $x * \frac{1}{x} = 0$
9.- $0 * a =$	10.- $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
11.- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$	12.- $a(bc) = ab \times ac$
13.- $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	14.- $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$
15.- $2^{a+b} = 2^a + 2^b$	16.- $2^{ab} = 2^a 2^b$
17.- $\frac{ax+by}{x+y} = a + b$	18.- $\frac{x}{2x+y} = \frac{1}{2+y}$
19.- $\frac{x+3z}{2x+y} = \frac{3z}{2+y}$	20.- $\frac{x-3}{2x} = -\frac{3}{2}$
21.- $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = 2ab$	
22.- $2(x + 3) = 2x + 3$	23.- $-(3x - w) = -3x - w$
24.- $(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + BD$	25.- $x = \frac{4z+x^2}{7}$
26.- $\frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{6}$ entonces: $x = 4$ y 2	27.- $2x + 5 = 11$ entonces: $x + 5 = \frac{11}{2}$
28.- $2x + 5 = y + 2$ entonces: $x + 5 = y$	29.- $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ entonces: $R = R_1 + R_2 + R_3$

30.- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} + 6x^2$ entonces: $x + 1 = 3 + 6x^2$	31.-Factorizando $x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$, como $x\left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6}$
32.- $(x - 5)(x - 7) = 3$ entonces: $x - 5 = 3$ luego $x = 8$; $x - 7 = 3$ luego $x = 10$	33.- $\frac{5}{2-x} + \frac{3}{2+x} = 4$ entonces $5(2 + x) + 3(2 - x) = 4$
34.- Pretendiendo que no se puede multiplicar por x porque "no se sabe que es x"	
35.- $\frac{a^7}{a^{10}} = a^3$	36.- $(3r)^2 = 3r^2$
37.- $2^{a+b} = 2^a + 2^b$	38.- $a \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$

Posteriormente, se relacionaron los errores reportados por los trabajos de May, (1990); Pacheco (1997) y Mis (2001), con la tipología de errores comunes de la tabla 3.1 ubicándolos en cada uno de los compendios de la categoría de la figura 1, de la siguiente manera:

Tabla 2.

Organización de errores encontrados en los trabajos de investigación realizados por May (1990), Pacheco (1997) y Mis (2001).

Clasificación de errores	Resultados de investigaciones sobre errores		
	May (1990)	Mis (2001)	Pacheco (1997)
Distribución generalizada	Tipo 11 Tipo 10 Tipo 16 $9^{-3} * 3^{-2} = 27^{-6}$ (variante del tipo 35)	Tipo 38 Variante del tipo 16 $((x^2y)^5(x^2y)^8 =$ $(xxy)^5(xxy)^8 =$ $(x^7y^5)(x^{10}y^8)$ Tipo 11	Tipo 11 Tipo 38 Tipo 10 Tipo 14
Aplicación repetida	$\frac{x+a}{x-a} = -1$ (Variante del tipo 17)	No detectó	Tipo 29 Tipo 17 Tipo 18: $\frac{x}{2x+y} = \frac{1}{2+y}$
Generalización	No detectó	Tipo 8 Tipo 9 Tipo 7	Tipo 32 Tipo 9 $A * 0 = A$ $\frac{n}{0} = 0; \frac{n}{0} = n$ $0^0 = 0$ $2^0 = 2$ Tipo 8
Conocimiento básico pobre aunque correcto	Tipo 27	Errores en cuanto a la semántica del álgebra. Tipo 16 $3x - 8x = 3x$	Si $m = 3$, entonces $3mb = 9$ $m = 3$, entonces $3mb = 6$; $6b, 6 + 3b$

		$x = 8 + 2y$, entonces $x = 10y$	$(-2a)^3 = -2a - 2a - 2a = -6a$ Tipo 26
Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento	Tipo 35 Tipo 22 Tipo 14 - $(x - 3) = -x - 3$ variante del Tipo 23 Tipo 33	Tipo 36 $2x + 2y = 1$, entonces $4x + 4y = 1$	Errores de planeación, no tienen claro el concepto de factorización: $X^2 - 2X - 8 = X(X - 2) - 8$ Tipo 33

Con base en la comparación realizada en el paso anterior, se eligieron para el trabajo aquellos con mayor frecuencia, las cuales, se sitúan de acuerdo con la clasificación presentada en la figura 1 en errores generados por una técnica incorrecta de extrapolación y se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3.

Organización de los errores elegidos bajo los cuales se realizó la propuesta didáctica.

Tipo 15	$2^{a+b} = 2^a + 2^b$	Tipo 10	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Tipo 16	$2^{ab} = 2^a 2^b$	Tipo 17	$\frac{ax+by}{x+y} = a+b$
Tipo 11	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$	Tipo 8	$x * \frac{1}{x} = 0$
Tipo 9	$0 * a = a$	Tipo 38	$a \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$

Con base en los errores de la tabla 3, se realizó el diseño de la propuesta y de las actividades que servirían como instrumento para probar la pertinencia de la misma. La propuesta constó de dos tipos de actividades, la primera basada en la confrontación con los tipos de errores algebraicos delimitados, inmersos en operaciones aritméticas, cada cual con sus respectivos procedimientos; se realizaron cinco versiones de la misma con siete ítems cada una, englobando de tres a cuatro tipos de errores en cada versión, para favorecer la interdependencia de la información (información en forma de rompecabezas). La tarea del alumno fue identificar dichos errores.

La segunda actividad se realizó de manera similar a la anterior, con la diferencia de que en este caso fueron operaciones algebraicas y no aritméticas. Consta de siete reactivos. La tarea de los estudiantes fue identificar aquellos procedimientos considerados algebraicamente incorrectos, para ello, fueron “sumergidos” en un contexto escolar en la que ellos son los profesores que deberán calificar y otorgar cierto puntaje a las operaciones presentadas (las cuales corresponden a los reactivos de la actividad) de acuerdo a los errores que hayan identificado, a cada ejercicio le corresponde cierto valor que oscila entre 0 a 10 puntos; también se les solicitó presentar el procedimiento correcto para cada uno de los reactivos, así como argumentar las razones por las que consideran que lo identificado corresponde a un error. La finalidad es relacionar los errores aritméticos que identificaron en la actividad anterior para señalar y corregir, en la medida de lo posible, los algebraicos que se encuentran en esta.

Con respecto a las actividades para probar la pertinencia de la propuesta, se consideró realizar el diseño de una evaluación diagnóstica, cuyos reactivos que la conformaran contuvieran intrínsecamente cada uno de los ocho tipos de errores establecidos para el presente trabajo. El objetivo de este es obtener información precisa acerca de los conocimientos concretos que poseen los preuniversitarios y aquellos errores específicos que cometen justo antes de poner en marcha la experiencia de la propuesta didáctica. Así mismo, diseñó otro instrumento, constituido por siete reactivos en las que se le pide al alumno resolver determinadas operaciones y simplificar expresiones algebraicas, cada reactivo, así como en cada una de las actividades anteriores, contiene de manera intrínseca algunos de los tipos de errores seleccionados para el desarrollo del presente. El objetivo es obtener información precisa acerca de los errores algebraicos que los preuniversitarios cometen después de realizar las actividades de la propuesta, con el fin de compararlos con los de la evaluación diagnóstica y así comprobar su pertinencia.

De igual forma, siguiendo las consideraciones del aprendizaje colaborativo, se optó por determinar un cuestionario que permitiera a los alumnos evaluarse como grupo respecto a su desempeño durante el ejercicio; dicho cuestionario se constituye por siete ítems cerrados y uno abierto, cada uno de los cerrados con cuatro opciones de respuesta determinados por puntuaciones organizadas de la siguiente forma:

1= Totalmente en desacuerdo **2= En desacuerdo** **3= De acuerdo** **4= Totalmente de acuerdo**

Los ítems de este cuestionario fueron tomados del trabajo realizado por Alfageme (2003), quien a su vez lo tomó del trabajo de Lobato (1998), debido a que los mismos han sido probados en otras investigaciones, por lo que su eficacia para evaluar está comprobada. Así mismo, también se consideró pertinente que cada miembro del equipo evalúe su participación y la de sus compañeros (heteroevaluación) dentro de su grupo colaborativo. Por tal motivo se consideraron ocho ítems cerrados para que cada alumno evalúe la participación de sus compañeros y tres ítems abiertos para autoevaluarse. Los ítems de esta evaluación son tomados del trabajo de Alfageme (2003).

La implementación de la propuesta se llevó a cabo con un grupo de preuniversitarios compuesto por treinta y un alumnos (de 105 seleccionados) que obtuvieron menos puntajes en la evaluación diagnóstica implementada por la FMAT-UADY para seleccionar a aquellos que participarían en los talleres de nivelación en matemáticas. En este sentido, la muestra poblacional fue heterogénea en cuanto a sexo, licenciaturas a las que fueron aceptados y a escuelas de procedencia.

RESULTADOS

En la evaluación diagnóstica se identificó que de los ocho errores algebraicos esperados se cometieron con mayor incidencia los tipos $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ y $\frac{ax+by}{x+y} = a+b$. En la misma, también se observó una manera errónea particular de resolver determinados reactivos en los que se esperaba el error $2^x 2^y = 2^{xy}$, en lugar de ello se manifestaron del tipo $a^x a^y = (a * a)^{xy}$ y $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$ en 74.20% de los participantes, los cuales no están contemplados en el catálogo de errores establecidos para el presente ni en el presentado por Matz (1980). En la figura 2 se ilustran unos ejemplos de este tipo de errores.

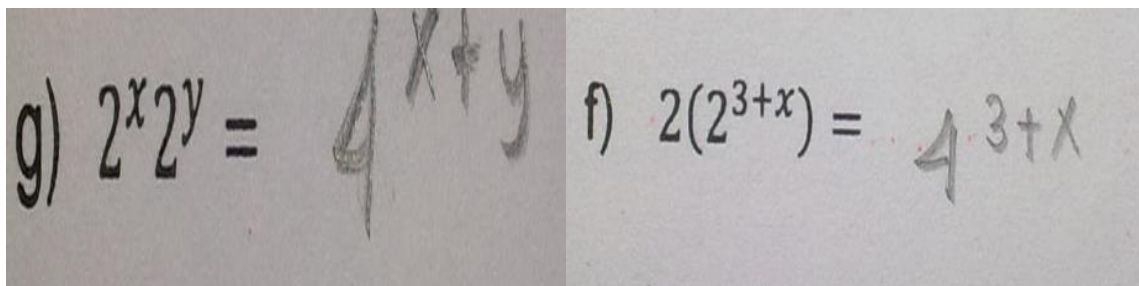


Figura 2. Ejemplos del error identificado que no se contempló en la tipología establecida.

De la primera actividad de la propuesta, que incluyó algunos reactivos con respuestas correctas derivados de procedimientos erróneos, se apreció cierta dificultad en la tarea del alumno para identificar errores inmersos en los reactivos con procedimiento incorrecto y respuesta correcta, a diferencia de aquellos que incluyeron respuestas incorrectas. Por ejemplo, se observó dificultad para identificar el error $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en el ítem $\sqrt{(-3)(5-5)+1} = \sqrt{(-3)(0)+1} = \sqrt{0+1} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 0 + 1 = 1$; en contraparte, les resultó más fácil encontrar y señalar este mismo error en el reactivo $3(\sqrt{70+11}) = 3(\sqrt{70} + \sqrt{11}) = 3(8.37 + 3.32) = 3(11.69) = 35.07$.

De los datos recabados de la segunda actividad se determinó que los alumnos identificaron el 87.5% de los tipos de errores implícitos, siendo el total ocho, y además, proporcionaron en la mayoría de los casos (ítems) argumentos válidos sobre operaciones que aritméticamente y algebraicamente son incorrectos, tal y como sucedió para el error $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ que se presenta en la figura 3.

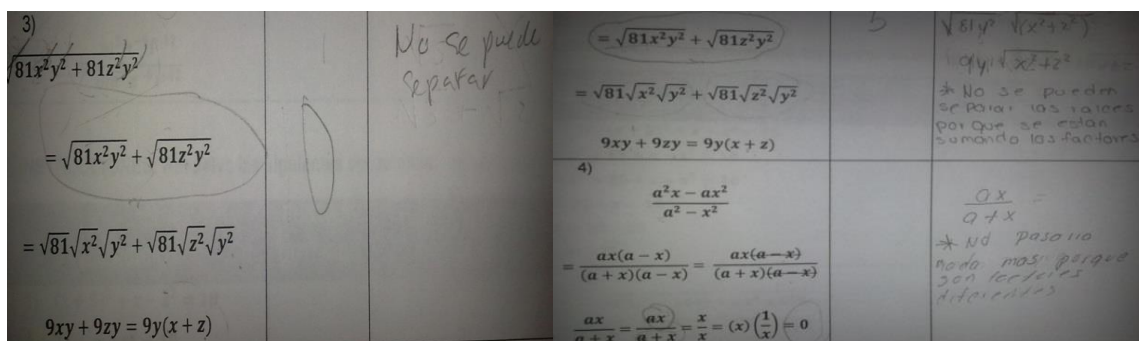


Figura 3. Ejemplo de la identificación de un error así como la argumentación proporcionada.

El 12.5% correspondió al error tipo $x * \frac{1}{x} = 0$ el cual fue identificado por dos equipos únicamente, debido a que, de acuerdo con lo observado, les bastó con identificar uno o dos errores en la operación para otorgar los puntajes.

De acuerdo con los datos obtenidos en la evaluación grupal y a la misma experiencia de la puesta en marcha, se destaca el intercambio de ideas y de los roles establecidos por parte de los integrantes de los equipos en la resolución de la actividad; así mismo, este hecho es confirmado después de manera individual por medio de la heteroevaluación y la autoevaluación. En la primera, sale a relucir la comunicación grupal y la realización individual de la tarea por cada uno de los integrantes; en la segunda se exhiben los comentarios en los que se resalta que el aprendizaje colaborativo les ayudó a identificar errores debido a la ayuda mutua que pudiera generarse o por las dudas que pudieran

resolverse, lo cual solo es posible si existe comunicación e intercambio de ideas. En la figura 4 se observan dos ejemplos en los que los alumnos sobresalen a favor de trabajar colaborativamente.

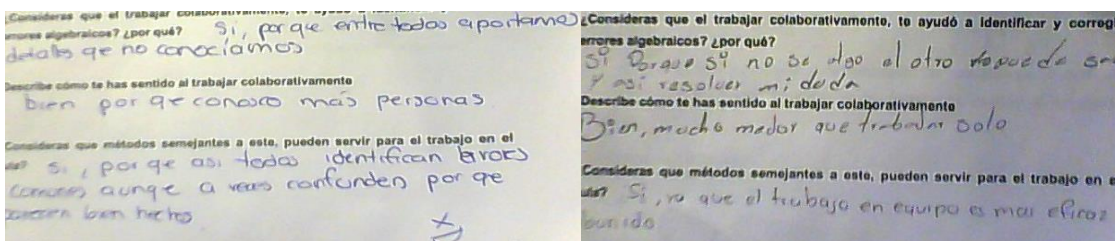


Figura 4. Respuestas proporcionadas por los estudiantes a las preguntas de la autoevaluación.

En la imagen de la izquierda se muestra la respuesta de un alumno en la que menciona que el trabajar colaborativamente le ayudó a identificar errores debido a que entre todos aportan ideas, así mismo indica que es un método que puede servir para el trabajo en clase porque de esta manera todos identifican errores. En la segunda imagen, el alumno señala que el trabajar en colaboración le ayudó a identificar errores puesto que de esta manera se resuelven dudas, además de que es más eficaz y mejor que trabajar sólo.

Con la finalidad probar la pertinencia, se presenta en la figura 5.3 una gráfica comparativa entre los datos obtenidos de la evaluación diagnóstica y los de la final.

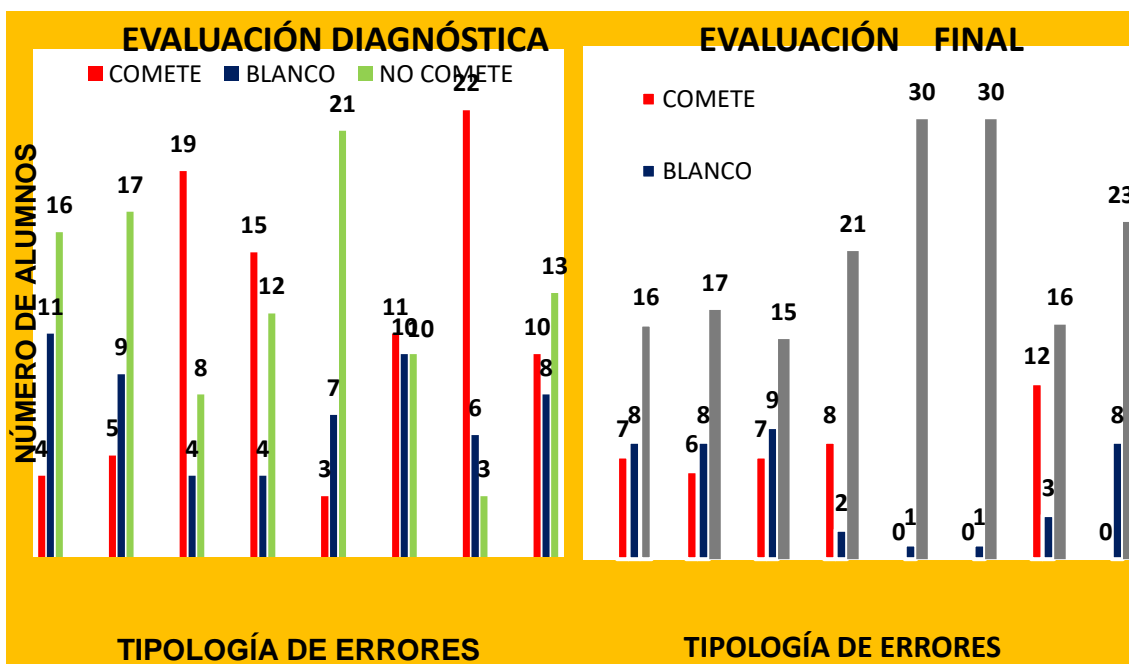


Figura 5. Comparativo de los datos recabados de la prueba diagnóstica y la final.

En la figura 5 se aprecia que los errores de la tipología 10 ($\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$), 11 ($(a+b)^2 = a^2 + b^2$) y 17 ($\frac{ax+by}{x+y} = a+b$) ocurrieron con una frecuencia muy cercana (49%) o mayor al 50% de los estudiantes en la evaluación diagnóstica, empero no se aprecian con los mismos porcentajes en la evaluación final, es decir, su índice de ocurrencia disminuyó siendo 22.6%, 25.8% y 38.7% para los errores tipos 10, 11 y 17 respectivamente. Así mismo, también puede notarse que los errores correspondientes a los tipos 15 ($2^{a+b} = 2^a + 2^b$), 16 ($2^{ab} = 2^a 2^b$) y 38 ($a \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$) que fueron

cometidos por 9.7%, 35.5% y 32.26% de los estudiantes, respectivamente, en la evaluación final se mostraron con porcentaje de cero, es decir, ya no fueron cometidos por los estudiantes.

En esta dirección, se destacan los efectos positivos de la propuesta didáctica a favor del aprendizaje del Álgebra, al disminuir el porcentaje de alumnos que en un principio (en la prueba diagnóstica) cometieron con frecuencia los errores esperados para este trabajo, incluyendo aquellos detectados que no se esperaban ($a^x a^y = (a * a)^{xy}$, $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$), la cual fue diseñada con base en las consideraciones del aprendizaje colaborativo, que garantizan que verdaderamente dicho aprendizaje sea colaborativo y no cooperativo. Como es de recordarse, entre dichas consideraciones se encuentra *la interdependencia positiva y las interacciones entre los alumnos*; la primera dependiendo de los objetivos, las tareas, roles, recompensas y recursos con los que se cuenta; la segunda referida a la comunicación generada entre los alumnos para la resolución conjunta de la actividad, dependiendo en gran parte por la primera.

Ahora, de los resultados obtenidos de las evaluaciones de la experiencia (evaluación grupal, heteroevaluación y autoevaluación) se distinguen las interacciones generadas durante la realización de la actividad, así como el intercambio de los roles establecidos para los alumnos; así mismo, dada la estructuración de la propuesta de manera que se favoreciera la interdependencia positiva, se asegura que de no ser por las interacciones generadas dentro de cada equipo, la identificación de los errores algebraicos en la actividad 2 de la propuesta no se hubiera realizado de manera satisfactoria, por lo que los resultados de la evaluación final hubieran sido distintos; en este sentido, se afirma que los resultados obtenidos de la propuesta didáctica se debieron a las interacciones generadas durante la actividad y a la interdependencia positiva que se propició por la estructuración de las actividades de la experiencia.

CONCLUSIONES

La confrontación con los tipos de errores algebraicos comunes, mediante actividades diseñadas y estructuradas bajo las consideraciones del aprendizaje colaborativo, apoya a identificar operaciones que algebraicamente son incorrectas, para no cometerlas en la resolución de ejercicios algebraicos, tal y como sucedió con los errores: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $\frac{ax+by}{x+y} = a+b$, $a^x a^y = (a * a)^{xy}$ y $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$, en los que se detectó notable diferencia entre los porcentajes de alumnos que cometieron los errores en la evaluación 1 y en la 2.

En este sentido, las actividades basadas en la confrontación de errores algebraicos comunes y las interacciones desencadenadas por el aprendizaje colaborativo, disminuyen índices de ocurrencia en errores muy comunes como $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $\frac{ax+by}{x+y} = a+b$, y otros como $a^x a^y = (a * a)^{xy}$ y $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$.

En el reactivo $(3m - 6n)^2$ de la evaluación 1 que contiene al error $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, se detectó el porcentaje más alto de respuestas correctas con un 29.03% de incidencia, mientras que en la evaluación de logros el porcentaje mayor fue de 38.70% correspondiente al reactivo $(x^2 x^{m+1} + 1)^2$. Este es solo un ejemplo de que los porcentajes de respuestas correctas no aumentaron posterior a la experiencia de la propuesta, lo que demuestra el alcance de la misma, es decir, además de las actividades diseñadas e implementadas bajo las consideraciones del aprendizaje colaborativo y la confrontación de errores algebraicos, se necesita de la instrucción del profesor para que, una vez identificados aquellos procedimientos incorrectos, los alumnos sean guiados hacia aquellos que sí se pueden realizar para cada caso.

Las actividades diseñadas a partir de la confrontación de errores algebraicos que se cometen con regularidad y las consideraciones del aprendizaje colaborativo para su diseño e implementación,

favorece el análisis, la discusión, reflexión y la delimitación de los errores algebraicos bajo los cuales se diseñan las actividades, lo que apoya al no cometimiento de los mismos en ejercicios algebraicos.

Los roles complementarios de los alumnos dentro de grupos de aprendizaje colaborativo, favorecen la interdependencia positiva al comprometer a cada integrante a tomar parte en la realización de las actividades, lo que permite que ningún alumno tome una actitud pasiva dentro del grupo, por lo que resulta importante que los alumnos conozcan previamente los roles que tienen que adoptar y es responsabilidad del docente promover y verificar que los mismos se pongan en práctica, con el fin de familiarizarlos lo más posible, no obstante, como se demostró con la experiencia de esta propuesta, en grupos no familiarizados y en los que las personas ni se conocen, bastó con que cada alumno adopte los roles que los caracterizan y que surgen de manera natural en la realización de actividades grupales, de manera que la tarea del profesor es verificar que cada integrante tome parte en la realización de las mismas, al mismo tiempo que favorezca la interdependencia de maneras diferentes para que esta no dependa únicamente de los roles.

En puesta en marcha de la propuesta, pudo apreciarse que los alumnos no diferencian entre trabajar en equipo y trabajar colaborativamente, puesto que la mayoría de los quipos pretendían dividirse el trabajo para poder ahorrar tiempo, tal y como están acostumbrados a hacerlo en las tareas en equipo; en este sentido, la experiencia de la propuesta sugiere que el aprendizaje colaborativo representa una alternativa para poner en práctica en los escenarios escolares, especialmente para el área de las matemáticas, por lo que se recomienda, en primera instancia, que los profesores de matemáticas se culturen sobre el tema y lo pongan en práctica, para que los alumnos de nuevas generaciones se familiaricen y conozcan las bondades que el aprendizaje colaborativo ofrece.

El análisis de tipos de errores algebraicos comunes, inmersos en operaciones aritméticas, asociado a la discusión generada dentro de grupos de aprendizaje colaborativo, permite identificar errores algebraicos inmersos en operaciones de la misma naturaleza, lo cual, apoya a la superación de éstos, como sucedió con los errores $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $\frac{ax+by}{x+y} = a+b$, $a^x a^y = (a * a)^{xy}$ y $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$.

La superación de los errores algebraicos comunes, sólo fue posible gracias a la responsabilidad individual y la interdependencia positiva que a su vez, propició las interacciones que permitieron discutir, identificar, argumentar y/o corregir grupalmente operaciones algebraicas, puesto que los datos de la evaluación 1 permiten asegurar que con los conocimientos previos no hubiera sido posible, así mismo, el diseño de la actividad 1 asegura que tampoco hubiera sucedido con el simple hecho de analizar tipos de errores algebraicos en operaciones aritméticas.

Las operaciones aritméticas que incluyeron resultados correctos derivados de procedimientos incorrectos obstaculizaron la tarea del alumno para identificar los errores en dichos procedimientos, lo que, en apariencia, resultó ser una estrategia errónea, no obstante, dejó en evidencia que los alumnos consideran que si el resultado es correcto, entonces el procedimiento también lo es, lo cual no siempre es correcto. Dado que en el Álgebra el resultado depende en gran medida del procedimiento, este hecho demostró el total desconocimiento que los alumnos tienen al respecto, por lo que resulta importante exhortar y crear una cultura en los alumnos de que en el Álgebra, lo que verdaderamente importa es el procedimiento realizado en la resolución de los ejercicios, por lo que resulta significativo conocer aquellos que no se deben realizar por ser algebraicamente incorrectos.

REFLEXIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

Con base en todo lo realizado para el cumplimiento del objetivo de investigación, desde la elaboración de la propuesta, la implementación de la misma y el análisis de los datos obtenidos de la puesta en marcha de la experiencia, se considera que trabajos similares pueden apoyar a mejorar la calidad del aprendizaje de los estudiantes, ya que permite poner en tela de juicio sus conocimientos para

reestructurar sus esquemas cognitivos con base en sus propia experiencia, además de que al mismo tiempo se promueven relaciones interpersonales y constituye una buena forma de evidenciar, que no siempre, todo lo que aparenta ser malo necesariamente lo es, como es el caso de los errores, que para este trabajo sirvieron como punto de partida para diseñar actividades que favorecieron el aprendizaje, en este caso, del Álgebra.

Con base en los logros obtenidos en este trabajo, sería bueno investigar si trabajos similares pudieran aplicarse para otros errores algebraicos o bien en otras ramas de las matemáticas en los que se identifiquen problemas con el aprendizaje, como bien pudiera ser el Cálculo diferencial o el integral, adaptándolo de acuerdo a los errores propios de la asignatura y a las consideraciones del trabajo colaborativo, que en esta investigación demostró ser pertinente para la confrontación de los preuniversitarios con los errores algebraicos. De igual forma se abre a la posibilidad de verificar la pertinencia de la misma en el ámbito del aprendizaje colaborativo no presencial asistido por redes, es decir, mediante entornos virtuales colaborativos, para así, estar a la vanguardia combinando dos áreas del conocimiento: Computación y Matemáticas.

Para la realización de trabajos futuros paralelos a este se tienen las siguientes recomendaciones:

Si se pretende cuantificar y evidenciar los errores que los alumnos cometen para luego comparar los resultados con los datos de otra evaluación, se recomienda tratar de evitar el diseño de reactivo, en la medida de lo posible, en los que se tenga la posibilidad de cometer uno o dos de todos los considerados en el mismo, es decir, evitar reactivos como $\frac{((9999999)^{256})(m^6 - m^6)}{m^6}$ que considera el error $\frac{ax+by}{x+y} = a + b$ y $\frac{ax+by}{x+y} = a + b$ o como $x\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ que considera el error $x * \frac{1}{x} = 0$ y $a \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$ en los que si se comete uno de ellos, por consecuencia ya no se comete el otro.

Así mismo, para el diseño de actividades referentes a operaciones aritméticas similares a los realizados en este trabajo de investigación, se recomienda en un primer nivel, utilizar ítems en los que las respuestas sean incorrectas, porque de esta manera, la tarea del alumno de identificar errores no se obstaculiza por el hecho de tener respuestas correctas, y en su segundo nivel, introducir algunas respuestas correctas con procedimiento incorrectos, con la intención de que haya un mayor análisis y reflexión, resaltando siempre la importancia de los procedimientos sobre los resultados, como por ejemplo el reactivo $\sqrt{(-3)(5 - 5) + 1} = \sqrt{(-3)(0) + 1} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 0 + 1$ y otro como $3(\sqrt{70 + 11}) = 3(\sqrt{70} + \sqrt{11}) = 3(8.37 + 3.32) = 3(11.69) = 35.07$.

Otra sugerencia es considerar contemplar el error advertido en la figura 4.6, el cual se generalizó de la siguiente manera: $a^x a^y = (a * a)^{xy}$ o como también puede ocurrir $a^x a^y = (a * a)^{x+y}$ puesto que se observó con gran incidencia en la mayor parte de la población de esta investigación y no se consideró en el catálogo de errores establecido en este trabajo.

REFERENCIAS

- Alfageme, M. (2003). *Modelo colaborativo de enseñanza-aprendizaje en situaciones no presenciales: un estudio de caso* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Murcia, Murcia, España.
- Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 450-455. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Aparicio, E., García, E. (2007). Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 210-215. México.
- Aparicio, E., Jarero, M. y Ordaz, M. (2011). Pruebas abiertas y sus evaluaciones en Matemáticas. Un análisis de sus relaciones. En A. Nivón, J. Oaxaca y C. Valderrama (Eds.), *Congreso Internacional Sobre Enseñanza de las Matemáticas*, 3, (pp. 255-262). México: UNAM.

- Collazos, C. y Mendoza, J. (2006). Como aprovechar el “aprendizaje colaborativo” en el aula. *Educación y educadores*, 9(2), 61-76.
- Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2004). Análisis de los errores: una fuente valiosa de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista iberoamericana de Educación*. Recuperado el 4 de mayo de 2011 de: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>
- Díaz-Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5(2), 1-13.
- Dillenbourg P. (1999). What do you mean by collaborative learning? En P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches* (pp.1-19). Oxford: Elsevier.
- Engler, A., Grgorini, M., Muller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Premisas*. Buenos Aires, Argentina. Ed: SOAREM, 23, 23-32.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de febrero de 2011 de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Jarero, M., Mukul, L. (2010). Una caracterización del tratamiento y asimilación de contenidos en los cursos de Álgebra superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 93-166.
- May, J. (1990). *Análisis de los errores de sintaxis algebraica en los alumnos del nivel de bachillerato y principales factores que influyen en su ocurrencia* (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Matemáticas, Mérida, Yucatán, México.
- Mis, J. (2001). *Errores algebraicos comunes que comenten los estudiantes egresados del nivel medio básico en el estado de Yucatán* (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Matemáticas, Mérida, Yucatán, México.
- Ovejero, A. (1990). *El aprendizaje cooperativo. Una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional*. Barcelona: PPU.
- Pacheco, V. (1997). *Estudio de los errores algebraicos en alumnos del nivel medio superior de la ciudad de Mérida, Yucatán* (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Matemáticas, Mérida, Yucatán, México.
- SEP. (2006). *Estudio de la eficiencia terminal de las IES mexicanas*, Subsecretaría de Educación Superior. Recuperado el 15 de noviembre de 2011 de: http://www.ses.sep.gob.mx/wb/ses/estudio_de_la_eficiencia_terminal_de_las_ies_m
- Serrano, J. y González, M. (1996). *Cooperar para aprender. ¿Cómo implementar el aprendizaje cooperativo en el aula?* España: Murcia: DM.
- Tziu, F. (1992). *Errores algebraicos en el uso de la factorización y una estrategia para su enseñanza* (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Matemáticas, Mérida, Yucatán, México.