

Maximiliano De las Fuentes Lara  
José Luis Arcos Vega  
Carlos Raúl Navarro González  
Universidad Autónoma de Baja California

# Estudio comparativo sobre la eficiencia de las actividades cognitivas a partir de dos enfoques de enseñanza: tradicional y otro que involucra tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

## Sinopsis

Se presenta el resultado de la aplicación de un instrumento de medición para establecer la eficiencia de dos métodos de enseñanza sobre las actividades cognitivas que logran los estudiantes alrededor del fenómeno sistema masa-resorte, en un curso de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. La administración del instrumento se realizó con 66 estudiantes, 30 de los cuales enfrentaron el objeto de aprendizaje con un enfoque de enseñanza tradicional (Gerald, 2002), mientras que el resto de los estudiantes trabajaron con una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora graficadora, y su diseño se basa en la teoría de las representaciones semióticas Duval (1993, 2000, 2006a, 2006b). Los resultados de la aplicación muestran de manera significativa, mayores niveles de eficiencia en cuanto a las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión de los distintos registros de representación semiótico para los alumnos que abordaron los conceptos del fenómeno sistema masa-resorte mediante la estrategia didáctica que incorpora la calculadora.

## Abstract

We present the results of the implementation of a measurement instrument to establish the efficiency of two teaching methods on the cognitive activities that students make about the mass-spring phenomenon, a differential equations course at the Faculty of Engineering Autonomous University of Baja California. The administration of the instrument was conducted with 66 students, 30 of whom faced the object of learning with a traditional teaching approach (Gerald, 2002), while other students worked with a teaching strategy that incorporates graphing calculator technology, and its design is based on the theory of semiotic representations Duval (1993, 2000, 2006a, 2006b). The results of the application show significantly higher levels of efficiency in terms of cognitive activities of representation, processing and conversion of the various registers of semiotic representation for students who addressed the concepts of mass-spring phenomenon by teaching strategy incorporating the calculator.

Términos clave: Investigación, Representaciones semióticas, Universidad, Ecuaciones diferenciales, Mexico.

Keywords: Research, Semiotic representations, Differential equations, Universities, Mexico.

Fecha de recepción: Agosto de 2010

Fecha de aprobación: Octubre de 2011

## Introducción

### Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos, los cuales deben ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. También se espera que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural, así como también que logren competencias para modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico y formal. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje está enmarcada en un contexto físico, de ciencia o de ingeniería.

A I revisar las características de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería, es factible percatarse del empirismo con el que los docentes atienden los procesos educativos. La mayoría son profesionales de alguna especialidad en la propia ingeniería, sin haber tenido preparación en el ámbito docente. La buena dicción, la prestancia, los cambios de volumen y tono de voz, los comentarios introductorios que motiven, la coherencia en las ideas, aclaraciones con lenguaje apropiado, la mímica, además del uso de los recursos tecnológicos como los proyectores, videos, equipo computacional, son claros ejemplos de los recursos con los que cuenta para desarrollar la actividad docente.

En un estudio realizado en argentina por Vilanova (2005) sobre las concepciones de la matemática en los profesores, se encontró que el 45% tiene una visión platónica, es decir, percibe la matemática como una ciencia acabada, rigurosa y lógicamente estructura, un 40% tiene una visión instrumental, es decir, concibe la matemática como un conjunto de normas, leyes y reglas para ser utilizadas como herramientas para atender algún fin externo, y solamente el 1% tiene una visión de la resolución de problemas, donde la matemática se identifica como un proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento, en donde los resultados prevalecen abiertos a revisión.

A partir de estas concepciones es evidente la orientación que cada docente da a la enseñanza de las matemáticas. Para Deiros (2003) la enseñanza de las matemáticas en ingeniería entraña un estilo usual de exposición influenciado por la elaboración de los fundamentos lógicos de la ciencia matemática, lo que en ocasiones dificulta la comprensión de conceptos y procesos de gran utilidad para el ingeniero, en este sentido, el aporte real que la matemática puede hacer en beneficio de la formación del ingeniero, queda oculto para los estudiantes, por tratar los temas de manera abstracta y por enfatizar en la adquisición de habilidades no provechosas.

En la formación del ingeniero se estima que entre el 16% y 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, a saber: álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas más. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es precisamente el denominado sistema

masa-resorte, el cual tiene múltiples aplicaciones en las diversas áreas de ingeniería.

Se sabe que entre 2004 y 2009 el porcentaje promedio de reprobación en la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California es del 23%, lo cual sin lugar a dudas es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 70 alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura.

### Teoría de las representaciones semióticas

Desde la perspectiva de la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente para su estudio y tratamiento se requiere contar representaciones de los mismos, las representaciones externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. Como lo señala el mismo Duval (2000, 4), “el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (biología, geología, física), no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos sino producir algunas representaciones”. En este sentido, las representaciones permiten el acceso al objeto matemático.

Desde la perspectiva de Duval (2006a) la actividad cognitiva de representación constituye una marca o conjunto de marcas perceptibles e identificables respecto de un objeto matemático, el tratamiento es la transformación de la representación dentro del mismo registro de representación, y la conversión es la transformación de la representación en otra representación de un registro diferente al original pero que conserva su esencia.

A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos y a la conceptualización de objetos matemáticos.

Un estudio realizado por Guzmán (1998) con estudiantes de cálculo, en el que a través de una prueba de respuesta abierta, evalúa el desempeño logrado respecto a la noción de función y su significado, y en el que incluye la consideración de los registros de representación gráfico, algebraico y el lenguaje natural, revela que las respuestas que dan los estudiantes se quedan en el mismo registro en el cual se planteó la pregunta, o en su defecto recurren al registro algebraico. Además solo el 14 % de los estudiantes incurre en las representaciones gráficas. El 50% de los estudiantes recurren al registro algebraico como mecanismo para emitir una respuesta al problema que se les plantea, lo cual deja ver la preponderancia de la enseñanza algorítmica.

En el proyecto de De Las Fuentes (1998) sobre la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos para funciones lineales y cuadráticas, se observó en general que los cambios de registro que más les causó dificultad a los estudiantes fueron del gráfico al algebraico y del verbal al algebraico e incluso se exhibió las incompetencias en el cuadro algebraico de carácter elemental. Además de deficiencias con relación a la asociación de las variables visuales y las unidades significativas de la expresión

algebraica.

Estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria se centra en el funcionamiento dentro del cuadro analítico o algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, et al, 1995). Jiménez (2000), presenta una reflexión en torno a la vinculación dinámica de las representaciones del conocimiento matemático como poco aprovechada en relación a los dispositivos electrónicos con los cuales hoy en día se cuenta. Lo cual es lamentable, pues tal y como lo plasma Giandini y Salerno (2009, 25), “el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje da la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación, dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales... [y] permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos”

#### Incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas

La incorporación de la tecnología promueve modificaciones en la forma de enseñanza y en la manera en que el estudiante aprende; estudios realizados por Artigue (1995) señalan que la enseñanza universitaria a los estudiantes se les prepara con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos. Similarmente, Demana y Waits (1998) señalan de la necesidad no solo de preparar a los docentes en el campo tecnológico y proporcionarles material didáctico basado en tecnología, sino de proveer un desarrollo profesional del docente. De Las Fuentes (1998) señala que la dificultad de que los estudiantes no vinculen de manera apropiada los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas –particularmente de aquellos que tienen que ver con el estudio y comprensión de fenómenos que se presentan en el campo de la ingeniería –, parece deberse a dos importantes aspectos, por una parte, la preponderancia de la enseñanza de las matemáticas basadas en un enfoque tradicional; y por otra parte, la ausencia o el uso inadecuado de la tecnología (por las concepciones de los profesores).

Rosa (2001) apunta que el atraso existente en la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se debe entre otras cosas a las concepciones de los docentes respecto a la enseñanza y aprendizaje, así como también a la ignorancia de las potencialidades que dichos instrumentos poseen. Pues tal y como Laborde (2003) y Saucedo (2005) señalan que la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes visualizar fenómenos matemáticos, hacer conexiones y realizar experimentos, promoviendo una mejor comprensión en el estudiante del concepto matemático.

Una propia experiencia (De Las Fuentes, Encinas y Bravo 2005), en la que se diseñó e implementó una estrategia didáctica que incorpora la calculadora Voyage 200 para abordar derivadas sucesivas, permite concluir un impacto favorable en la asociación de características geométricas esenciales (puntos críticos, inflexión, concavidades).

Un deseo importante dentro de las habilidades que se espera de los estudiantes tiene que ver con el planteamiento de regularidades sobre el concepto de estudio, regularidades que

permiten afianzar el conocimiento de algún objeto matemático. En este sentido la calculadora ofrece la oportunidad de conjeturar propiedades y comprobar visualmente situaciones que algebraicamente no es viable observar, (Lupiáñez, & Moreno, 2001)

Una de las consideraciones medulares de la incorporación de las calculadoras en la enseñanza tiene que ver con el balance en el uso o distribución del tiempo, Demana y Waits (1998) apunta que si bien es cierto anteriormente la distribución mayoritaria del tiempo de una clase se enfocaba al cómputo de lápiz y papel, además de una incipiente resolución de problemas como consecuencia del desarrollo conceptual, ahora, la resolución de problemas, la argumentación e interpretación, así como el cómputo (mental, papel y lápiz y el cómputo con tecnología) deben estar equilibrados. Infinidad de autores (Moreno y Rojano, 1999; Hernández, 2000; Karen, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005; Eduteka, 2006) confirman que la incorporación de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas contribuye a modificar los enfoques de enseñanza y estimulan la actividad intelectual de los estudiantes; pero que existe resistencia del profesorado para su aceptación; y que es necesario investigación sobre los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes, las habilidades y actitudes que favorece.

En el presente proyecto de investigación se diseña e implementa una estrategia didáctica replicable en la enseñanza de las matemáticas; que contribuye a mejorar la eficiencia de los conocimientos alcanzados por los estudiantes cuando se aborda el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, que involucra ecuaciones diferenciales de segundo orden y utiliza como herramienta tecnológica la calculadora TI-voyage 200. Esta apoya y permite visualizar y conectar de manera dinámica las distintas representaciones en la educación matemática a saber: gráfica, numérica, algebraica e icónica o física virtual. Se presentan los resultados tanto del diagnóstico Pre-Test como del comparativo de las actividades cognitivas logradas por los estudiantes a partir de la implementación de la estrategia didáctica y el Post-Test.

En esta investigación se contempla como objetivo el producir una estrategia didáctica que promueva en el alumno la eficiencia del conocimiento matemático relacionado con el sistema masa-resorte, dicha eficiencia se determinará a partir de los desempeños que logren los estudiantes alrededor de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) y los registros de representación semiótica inicial y final en cada uno de los reactivos del post-test.

Se alude aquí a una enseñanza tradicional de acuerdo a Gerald (2002), en donde señala que el trabajo con la calculadora no tiene que enfatizarse hasta que las habilidades del cálculo estén bien establecidas, aunado a un proceso de evaluación que se distingue por pruebas de medición que se abocan especialmente a la eficiencia con que se utilizan las reglas y algoritmos matemáticos.

## Desarrollo metodológico

El problema de investigación se ha planteado mediante el siguiente cuestionamiento: ¿Existe diferencia de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión emple-

ando el sistema masa-resorte que alcanzan los alumnos de ingeniería cuando son sometidos a una enseñanza tradicional y con estrategia didáctica alterna que incorpora tecnología de la calculadora graficadora en la Facultad de Ingeniería Mexicali?

Para efecto de dar respuesta a esta interrogante se han planteado el par de hipótesis siguiente:

Hipótesis nula: La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene igual influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos en las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista.

Hipótesis alternativa: La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene una mayor influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos en las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista.

Aquí se evalúa la eficiencia de los conocimientos mediante el desempeño de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión de los estudiantes, de acuerdo a la teoría de las representaciones semióticas de Duval (2006b).

Se realizó un estudio explorativo y comparativo con dos grupos de estudiantes en la Universidad Autónoma de Baja California, en virtud de manipular de manera intencional variables independientes y se mide la variable dependiente, así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos el diseño de investigación que se utiliza es el denominado experimento "puro" de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). Con el objeto de comprobar la conjetura objeto de esta investigación se usa la prueba de medias de Walpole y Myers (1989).

Con el propósito de establecer las condiciones de los estudiantes en cuanto a las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, se diseñó y aplicó un instrumento de medición diagnóstico o Pre-Test, con la consideración de los criterios de Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para la generación de ítems en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum, a la vez es matricial ya que involucra amplitud en contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales han sido estudiados y tratados por los estudiantes tanto en cursos de cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística y métodos numéricos previos.

La estrategia didáctica es diseñada a partir de las teorías cognitivas de Duval (1993, 2000, 2006a, 2006b) y Hitt (1991, 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; los avances logrados en el campo tecnológico por Kutzler (2003), Demana y Waits (1998),

Barton y Diehl (1999), Bower (2003). Y finalmente, Laborde (2003) por su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente por promover en la estrategia didáctica la construcción de relaciones entre las distintas representaciones, así como de la posibilidad de conexión entre los registros, además de privilegiar los cálculos rápidos mediante el sistema de cómputo algebraico integrado a la calculadora e inherente a la propia estrategia didáctica.

En De Las Fuentes y Arcos (2007, 2008) se identifican algunos aspectos que son considerados e integrados en el diseño de la estrategia didáctica, el manejo insuficiente de las condiciones iniciales del sistema masa-resorte en el lenguaje matemático, el énfasis en el proceso de resolución de las distintas ecuaciones diferenciales que modelan los movimientos del sistema masa-resorte son ejemplo de ello. Así como también se dejó entrever como necesario reforzar el tránsito del contexto o registro de representación numérica al físico, y del registro analítico o algebraico al físico.

La estrategia didáctica en su totalidad se conformó mediante 13 actividades en los que los conceptos matemáticos involucrados en las actividades de aprendizaje van alternando su rol, de herramienta a objeto (Douady, 1986) y viceversa, además se destaca el trabajo por parte de los estudiantes en las diferentes actividades cognitivas a evaluar. Cada actividad fue descrita en cuanto a la actividad cognitiva preponderante (representación, tratamiento y conversión), y los registros de representación relacionados. La Tabla 1 muestra la caracterización o especificación de la actividad número 4 de la estrategia didáctica, en la cual se pretende fortalecer las competencias señaladas, involucrando de manera importante la interacción del estudiante con la calculadora y el contenido curricular planteado.

Tabla 1  
Especificación de la actividad número 4 de la estrategia didáctica

No. de Actividad	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
4	Representación	Gráfico Lenguaje natural Físico virtual	Objeto	Movimiento sobreamortiguado, velocidad de la masa, posición de equilibrio	Editor de programas

Esta actividad incorpora para su desarrollo un programa para la calculadora, con el propósito de que el estudiante interactúe de manera virtual con el sistema masa-resorte e infiera los rasgos de velocidad, aceleración, continuidad y restitución del movimiento sobreamortiguado.

La calidad del experimento fue verificada mediante su validez interna de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). Para realizar la experimentación, los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; haciéndoles entrega a cada uno de ellos una calculadora simbólica del tipo voyage 200. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina (edición de ecuaciones, graficación de funciones, ventanas de graficación, determinación de críticos relativos y raíces reales), ya que algunos de ellos no habían tenido contacto con la calculadora simbólica voyage 200. Se entregó a cada estudiante del equipo

un cuadernillo con las actividades de aprendizaje y las instrucciones a seguir para el desarrollo de las actividades fueron dadas verbalmente por el instructor. Posteriormente, en cada una de las sesiones se discuten las propuestas a nivel grupal y el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Participaron en la investigación 66 estudiantes de la Facultad de Ingeniería, 36 de ellos integraban el grupo experimental, y el resto trabajaron de manera tradicional, la experimentación tuvo una duración de 12 días incluyendo la aplicación del post-test.

El instrumento de medición post-test está constituido por 37 reactivos y se ha diseñado bajo las mismas consideraciones que el diagnóstico, a diferencia que se aboca a determinar la eficiencia de conocimientos adquirido por los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas, alrededor de los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte. En la figura 1 se muestra la caracterización de 3 reactivos representativos (4, 10 y 14) del Post-Test, en cuanto a la actividad cognitiva de representación, tratamiento y conversión, así como de cada uno de sus respectivos registro de representación inicial y final.

No. de Reactivo: 4																																																																											
Actividad cognitiva: Representación																																																																											
Registro inicial: Algebraico																																																																											
Registro final: Lenguaje natural																																																																											
La ecuación diferencial $m x''+k x=0$ modela el sistema masa-resorte del movimiento:																																																																											
A) Amortiguado libre		B) Críticamente amortiguado																																																																									
C) Forzado sin amortiguamiento		D) Libre no amortiguado																																																																									
No. de Reactivo: 10																																																																											
Actividad cognitiva: Tratamiento																																																																											
Registro inicial: Lenguaje natural																																																																											
Registro final: Numérico																																																																											
Se sabe que un sistema masa-resorte cuenta con un movimiento del tipo subamortiguado, determine de los conjuntos de datos numéricos siguientes cual representa al sistema citado.																																																																											
A)	B)	C)	D)																																																																								
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo</th> <th>Posición</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.000</td><td>.167</td></tr> <tr><td>.250</td><td>-.086</td></tr> <tr><td>.500</td><td>.042</td></tr> <tr><td>.750</td><td>-.019</td></tr> <tr><td>1.000</td><td>.007</td></tr> <tr><td>1.250</td><td>-.001</td></tr> <tr><td>1.500</td><td>-7.52E-4</td></tr> <tr><td>1.750</td><td>.001</td></tr> </tbody> </table>	Tiempo	Posición	0.000	.167	.250	-.086	.500	.042	.750	-.019	1.000	.007	1.250	-.001	1.500	-7.52E-4	1.750	.001	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo</th> <th>Posición</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.000</td><td>.167</td></tr> <tr><td>.250</td><td>-.208</td></tr> <tr><td>.500</td><td>.167</td></tr> <tr><td>.750</td><td>-.059</td></tr> <tr><td>1.000</td><td>-.072</td></tr> <tr><td>1.250</td><td>.175</td></tr> <tr><td>1.500</td><td>-.208</td></tr> <tr><td>1.750</td><td>.159</td></tr> </tbody> </table>	Tiempo	Posición	0.000	.167	.250	-.208	.500	.167	.750	-.059	1.000	-.072	1.250	.175	1.500	-.208	1.750	.159	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo</th> <th>Posición</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.000</td><td>.250</td></tr> <tr><td>.250</td><td>-.092</td></tr> <tr><td>.500</td><td>-.102</td></tr> <tr><td>.750</td><td>-.032</td></tr> <tr><td>1.000</td><td>-.032</td></tr> <tr><td>1.250</td><td>-.015</td></tr> <tr><td>1.500</td><td>-.007</td></tr> <tr><td>1.750</td><td>-.003</td></tr> </tbody> </table>	Tiempo	Posición	0.000	.250	.250	-.092	.500	-.102	.750	-.032	1.000	-.032	1.250	-.015	1.500	-.007	1.750	-.003	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo</th> <th>Posición</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.000</td><td>-.250</td></tr> <tr><td>.250</td><td>-.032</td></tr> <tr><td>.500</td><td>.024</td></tr> <tr><td>.750</td><td>.031</td></tr> <tr><td>1.000</td><td>.025</td></tr> <tr><td>1.250</td><td>.017</td></tr> <tr><td>1.500</td><td>.011</td></tr> <tr><td>1.750</td><td>.007</td></tr> </tbody> </table>	Tiempo	Posición	0.000	-.250	.250	-.032	.500	.024	.750	.031	1.000	.025	1.250	.017	1.500	.011	1.750	.007
Tiempo	Posición																																																																										
0.000	.167																																																																										
.250	-.086																																																																										
.500	.042																																																																										
.750	-.019																																																																										
1.000	.007																																																																										
1.250	-.001																																																																										
1.500	-7.52E-4																																																																										
1.750	.001																																																																										
Tiempo	Posición																																																																										
0.000	.167																																																																										
.250	-.208																																																																										
.500	.167																																																																										
.750	-.059																																																																										
1.000	-.072																																																																										
1.250	.175																																																																										
1.500	-.208																																																																										
1.750	.159																																																																										
Tiempo	Posición																																																																										
0.000	.250																																																																										
.250	-.092																																																																										
.500	-.102																																																																										
.750	-.032																																																																										
1.000	-.032																																																																										
1.250	-.015																																																																										
1.500	-.007																																																																										
1.750	-.003																																																																										
Tiempo	Posición																																																																										
0.000	-.250																																																																										
.250	-.032																																																																										
.500	.024																																																																										
.750	.031																																																																										
1.000	.025																																																																										
1.250	.017																																																																										
1.500	.011																																																																										
1.750	.007																																																																										
No. de Reactivo: 14																																																																											
Indicador: Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.																																																																											
Actividad cognitiva: Conversión																																																																											
Registro inicial: Lenguaje natural																																																																											
Registro final: Algebraico																																																																											
Se une una masa de 2 slug a un resorte cuya constante es 4 libras por pie. Se suelta la masa a 1 pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 2 pie por segundo hacia arriba; el movimiento se da en un medio cuya fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a seis veces la velocidad instantánea. La ecuación diferencial que modela el sistema es:																																																																											
A) $x''-3x'+2x=0$	B) $x''+3x'+2x=0$	C) $x''+6x'+2x=0$	D) $x''-6x'+2x=0$																																																																								

Figura 1  
Caracterización de reactivos del post-test

El post-test se administró posterior a la terminación de la aplicación de la estrategia didáctica en el grupo experimental y de igual forma para el caso de los estudiantes del grupo de control, de manera que la comparación de los resultados permite responder al planteamiento hipotético de origen.

#### Análisis y discusión de resultados

El diagnóstico permitió establecer la uniformidad previa en cuanto a las actividades cognitivas de los estudiantes que participaron en la investigación, toda vez que una prueba de hipótesis de medias con un nivel de significancia evidencia que no hay diferencia en cuanto al puntaje de los estudiantes de los grupos participantes antes de iniciar la experimentación.

Los instrumentos de medición diagnóstica y post-test fueron diseñados en conjunto tanto por el investigador como por los instructores participantes en la investigación, se incluyeron solo preguntas de opción simple, una correcta y tres distractores, lo anterior con la finalidad de enfatizar de manera más objetiva en el aprovechamiento de los grupos tanto de control como piloto. Cabe señalar que en la aplicación de los instrumentos de medición no se permitió el uso de libros ni calculadora.

Inclusive es de notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión. En este sentido se presume un equilibrio entre los distintos registros de representación. En cuanto al registro inicial se presenta una situación similar, en cuanto que no hay diferencia significativa entre los registros, gráfico, lenguaje natural y algebraico, siendo este último el de mayor complejidad con un índice promedio de dificultad de 0.53. En tanto que cuando se trata de los registros de representación finales se encuentra diferencia significativa (evidenciado por las pruebas de hipótesis realizadas) entre el registro algebraico y el lenguaje natural, de igual forma entre el registro algebraico y el gráfico.

En el diagnóstico y mediante las pruebas de hipótesis se encuentra que cuando se trata de reactivos cuyo registro final es el lenguaje natural y gráfico la dificultad es mayor para los estudiantes, inclusive se evidencia diferencias significativas entre los registros finales algebraicos y lenguaje natural, así como también entre el algebraico y el gráfico.

La actividad cognitiva de tratamiento externo o conversión evidencia la mayor dificultad para los estudiantes cuando esta se presenta como necesaria para la resolución de un reactivo. La representación se posiciona como la de menor dificultad y secundariamente la actividad de tratamiento. De acuerdo a las pruebas de hipótesis no hay diferencia significativa entre tales actividades cognitivas para el grupo de control.

La confiabilidad del instrumento de medición Post-Test es establecida a partir del coeficiente de Kuder – Richardson ( $KR_{21}$ ), cuyos parámetros involucrados son el número de ítems, media y desviación estándar de los resultados de los 66 estudiantes que conforman los grupos experimental y de control, obteniendo un coeficiente de 0.86, calificado como correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006).

En la tabla 2 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices promedio de dificultad para cada una de las actividades cognitivas evaluadas a partir del post-test.

Tabla 2

Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a la actividad cognitiva de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.

Actividad cognitiva	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variación del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variación del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Representación	0.565	0.029	0.171	36	0.383	0.014	0.120	30
Tratamiento	0.501	0.020	0.141	36	0.336	0.028	0.167	30
Conversión	0.404	0.013	0.116	36	0.283	0.012	0.111	30

Para los grupos experimentales la actividad cognitiva con mayor dificultad es la de tratamiento externo o conversión, seguida por el tratamiento, en este caso se evidencia diferencia significativa entre la actividad cognitiva de conversión y la de representación.

Para el caso de las actividades cognitivas, el comparativo entre los grupos de control y experimental evidencia diferencia de manera significativa a favor del grupo experimental la representación, el tratamiento y la conversión. Ambos grupos reflejan menor eficiencia cuando la actividad cognitiva requerida para resolver favorablemente un reactivo es la conversión, le sigue la actividad de tratamiento y la representación.

En la tabla 3 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para los registros iniciales de los reactivos a partir del post-test.

Tabla 3

Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro inicial de los reactivos del post-test de los estudiantes del grupo de control y piloto.

Registro inicial	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variación del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variación del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Algebraico	0.448	0.029	0.170	36	0.313	0.015	0.12	30
Gráfico	0.545	0.020	0.142	36	0.272	0.013	0.117	30
Lenguaje natural	0.431	0.018	0.137	36	0.341	0.015	0.123	30
Numérico	0.507	0.029	0.170	36	0.475	0.035	0.189	30

De manera reincidente los estudiantes del grupo de control muestran mayor dificultad para resolver los reactivos cuyo registro inicial es gráfico, mientras que en contraste se tiene el registro inicial numérico, de hecho la prueba de hipótesis sugiere diferencia significativa entre los registros gráfico y numérico.

Destaca un mayor rendimiento por parte de los estudiantes de los subgrupos experimentales en la resolución de reactivos cuyo registro original es gráfico, seguidamente del numérico, sin embargo en ningún caso prevalece diferencia significativa entre alguno de los registros iniciales de representación.

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros iniciales de representación algebraico, gráfico y de lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro inicial numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro inicial gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro dentro y fuera del mismo grupo experimental.

En la tabla 4 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para los registros finales de los reactivos a partir del post-test.

Tabla 4

Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro final de los reactivos del post-test, de los estudiantes del grupo piloto y de control.

Registro final	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variación del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variación del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Algebraico	0.414	0.017	0.130	36	0.332	0.020	0.143	30
Gráfico	0.535	0.015	0.125	36	0.325	0.014	0.120	30
Lenguaje natural	0.567	0.022	0.149	36	0.319	0.018	0.136	30
Numérico	0.410	0.018	0.134	36	0.338	0.026	0.163	30

En cuanto al registro final en la resolución de reactivos, se observa equilibrio en los promedios del índice de dificultad en el grupo de control.

Para el grupo experimental el menor rendimiento se tiene a partir del registro final numérico, e igualmente el algebraico, de hecho las pruebas de hipótesis evidencian diferencia significativa en el registro final algebraico y el lenguaje natural, así como también diferencia significativa en el registro final numérico y el lenguaje natural.

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros finales de representación algebraico, gráfico y de lenguaje

natural, y aunque mínimamente también en el registro final numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro final gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro de representación dentro y fuera del mismo grupo experimental.

La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos, por una parte logra que los estudiantes del grupo experimental se apropien intelectualmente de los problemas que conforman la estrategia didáctica, además se consigue que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico virtual, los estudiantes logran describir tanto física como geoméricamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado en sus tres dimensiones, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado. Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa.

## Conclusiones

De los análisis y resultados presentados, se pueden obtener las siguientes conclusiones sobre la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora y su impacto en las actividades cognitivas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales:

1. Al incluir tecnología de la calculadora la propuesta busca que el estudiante construya los conceptos matemáticos a partir de la vinculación de los distintos registros de representación, así como también del mismo producto de su interacción con él, los conceptos matemáticos involucrados juegan un papel alternado de herramienta y objeto en la resolución de situaciones de ingeniería, desarrollando colateralmente actitudes y competencias para su enfrentamiento.
2. Se verificó en el pre-test que los índices de dificultad más bajos prevalecen en los registros gráficos y de lenguaje natural, así mismo ocurrió con el grupo de control en los resultados obtenidos por el post-test, lo anterior evidencia el matiz del enfoque de enseñanza tradicional de las matemáticas para ingeniería, en el cual se destaca tratamiento del estudiante en los registros algebraico y numérico, particularmente cuando tal registro es final. La implementación de la estrategia didáctica dejó entrever la promoción del registro tanto gráfico como de lenguaje natural, toda vez de la existencia de diferencias significativas entre el grupo experimental contra el grupo de control.
3. Los índices promedio de dificultad y las pruebas de hipótesis realizadas evidencian la complejidad natural de la actividad cognitiva (tanto en el grupo de control como experimental) requerida en la resolución de los reactivos, toda vez que el tratamiento externo o conversión conserva el valor más bajo de índice promedio de dificultad, seguidamente esta el tratamiento y la representación como la actividad más simple de llevar a cabo por parte del estudiante, es efectivamente esta última considerada y también llamada de formación como base para proseguir al tratamiento y la conversión de los registros de representación, el dominio de estas actividades cognitivas y la coordinación de las mismas es entonces la consideración del éxito del estudiante en cuanto al conocimiento y apropiación de los conceptos matemáticos. Se tiene como producto de la implementación de la estrategia didáctica diferencia significativa

y favorable para el grupo experimental en contra del grupo de control en cuanto a las tres actividades cognitivas.

4. La incorporación de la tecnología de la calculadora al implementar la estrategia didáctica puede extenderse previo diseño a otros temas y conceptos de matemáticas, tales como las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, cálculo de puntos críticos, área bajo la curva, transformada de Laplace; pues consecuentemente con la teoría de Duval de las transformaciones semióticas se enfatizaría en la apropiación y disposición conceptual, análisis e interpretación sobre la manipulación algebraica y numérica. Si bien los resultados reflejan en el estudio una evolución para la mejora del aprendizaje de las matemáticas en la educación superior con aplicación de diferentes métodos y técnicas en el área de ingeniería aun sigue siendo un reto.

### Referencias

- Artigue, M., Douady R., Moreno L. y Gómez P., (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, pp. 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Barton, R. & Diehl, J. (1999). Advanced Placement Calculus with the TI-89, Explorations. Estados Unidos de América. Texas Instruments.
- Bower, B., Brueningsen, C., Brueningsen, E., Gough, S. y Turley, W., (2003). Discovering Math on the Voyage 20: Explorations. Edit. Texas Instruments, Estados Unidos de América.
- Contreras, L., Bachhoff, E. y Larrazolo, N., (2004). Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica. México: Manual Moderno.
- Deiros, F. B., (2003). Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería. Recuperado el 12 de junio de 2007 del sitio web: <http://www.ilustrados.com/publicaciones/EpyAVkkykeLzKtzAv.php>
- De Faria, E., (2005). Matemáticas y nuevas tecnología en Costa Rica, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 18, 749-754.
- De Las Fuentes, M., (1998). Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real Empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Hermosillo, Sonora. UNISON.
- De Las Fuentes, M., Encinas, A., y Bravo, M., (2005). Enseñanza de derivadas sucesivas. Memorias del primer foro nacional de ciencias básicas, "La modernidad en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias básicas para la formación del ingeniero".
- De Las Fuentes, M. y Arcos, J., (2007). Una alternativa didáctica para el tratamiento del fenómeno sistema masa-resorte empleando la calculadora graficadora. Memorias del 7mo/ Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad.
- De Las Fuentes, M., Arcos, J. y Díaz, B., (2008). Diseño de una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. Investigación presentada en el Octavo Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad,

- Universidad y Política Educativa “Ser, Hacer y Deber Ser”. Recuperado 19 de noviembre de 2008, de <http://www.retosyexpectativas.uan.mx>
- Demana, F. y Waits, B., (1998). El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas. Recuperado el 12 Marzo de 2007, de sitio de la Universidad de Ohio, Estados Unidos: <http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/roleofgraphcalc.pdf>
- Douady, R., (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-32.
- Duval, R., (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*, pp. 37-65. Strasbourg, France: IREM.
- Duval, R., (2000). Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de la Université du Littoral Côte-d’Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille de <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>
- Duval, R., (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics., *Journal of Educational Studies in Mathematic*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R., (2006b). Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques?., *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 9(Especial), 45-81,
- EduTEKA., (2006). Funcionaria del Ministerio de Educación explica los alcances del proyecto de calculadoras en la enseñanza. <http://www.eduteka.org/Entrevista3.php>, acceso: 12 Marzo (2007).
- Gerald, A. G., (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.
- Giandini, V. y Salerno, M., (2009). La geometría, los ingresantes y el software maple, *Formacion Universitaria*, 2(4), 23-30.
- Guzmán, I., (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes, *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 1(1), 5-21.
- Hernández, R. A., (2000). A didactic engineering research performed whit in a course on ordinary differential equations where students use the TI-92 calculator.
- Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la investigación* (4a. ed.). México: Mc. Graw Hill.
- Heugl, H., (2003). La necesaria competencia algebraica fundamental en la época de los Sistemas de Cómputo Algebraico, En A. Del Castillo, et al, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico*, (pp 29-66). Hermosillo, Sonora.
- Hitt, E. F., (1991). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación Matemática*, 7, 63-75.
- Hitt, E. F., (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes

de Tecnología. Boletín de la Asociación Venezolana, 10(2), 12-21

- Jiménez, J., Hugues, E., y Castillo, A., (2000). La Experimentación Matemática Escolar apoyada por un dispositivo CAS. En sexta escuela de verano del Centro Austriaco para la Didáctica del Cómputo Algebraico en Portoroz, Slovenia.
- Karen, D., (2000). La influencia de la tecnología en las normas sociomatemáticas en un curso de ecuaciones diferenciales, pp 219-224.
- Kutzler, B., (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas (J. Jiménez, Trad.). En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez y E Hugues, (Eds.), Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: (Artículo original en inglés Kutzler B. The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics.
- Laborde, C., (2003). ¿Porqué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?, En J. Jiménez, et al (Eds.), Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico (pp 115-127). Hermosillo, Sonora.
- Lupiáñez, J. y Moreno, L., (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas, 248-256. Extraído el 06 Marzo, 2007, de [http://menweb.mineduacion.gov.co/documentos/Forma\\_doce\\_mate\\_CAPITULO2A.pdf](http://menweb.mineduacion.gov.co/documentos/Forma_doce_mate_CAPITULO2A.pdf)
- Moreno, L. y Rojano, T., (1999). Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. Revista Avance y Perspectiva, 18, 325-333.
- Queralt, T., (2000). Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas. Centro de información, innovación y recursos educativos de Torrent (CEFIRE) España.
- Rosa, N. A., (2001). La calculadora y los sistemas semióticos de representación: Hacia un aprendizaje de los conceptos matemáticos, Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim, 2, Artículo 1, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.
- Saucedo, R., (2005). La exploración de una ecuación diferencial con la ayuda de Voyage 200 y el CBL; un trabajo experimental, Revista Innovaciones Educativas, 7, 10-11.
- Vilanova, S., Rocerau, M., Medina, P., Astiz, M., Oliver, M., Vecino, S. y Valdez, G., (2005). Concepciones de los docentes sobre la matemática, su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 18, 444-449.
- Walpole, R. E., & Myers, R. H., (1989). Probabilidad y estadística para ingenieros (2a. ed.). México: Interamericana.

## DATOS DE LOS AUTORES

Maximiliano De las Fuentes Lara  
Universidad Autónoma de Baja California  
Facultad de Ingeniería  
maximilianofuentes@uabc.edu.mx

José Luis Arcos Vera  
Universidad Autónoma de Baja California  
Instituto de Ingeniería  
arcos@uabc.mx

Carlos Raúl Navarro González  
Universidad Autónoma de Baja California  
Facultad de Ingeniería  
carlos\_raul\_n@hotmail.com