Educación y Ciencia (2024), 13(61), 130-155
Artículo de investigación

Diseño de una trayectoria de desarrollo de prácticas para la enseñanza de la inferencia bayesiana en bachillerato

Design of a learning trajectories of the development based on practices for teaching Bayesian inference in high school

Cristian Guadalupe Paredes-Cancino[1] y Gisela Montiel Espinosa[2]
[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México (cristian.paredes@cinvestav.mx) y [2]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México (gmontiele@cinvestav.mx)

Cómo citar este artículo:
Paredes Cancino, C. G. y Montiel Espinosa, G. (2024). Diseño de una trayectoria de desarrollo de prácticas para la enseñanza de la inferencia bayesiana en bachillerato. *Educación y ciencia, 13*(61), 130-155.

Recibido: 3 de noviembre de 2023 | Aceptado: 26 de abril de 2024 | Publicado: 15 de julio de 2024

Resumen
Situados en la investigación cuyo interés es la creación de estrategias que favorezcan formas de pensamiento propias del conocimiento estocástico, este artículo expone la primera fase de una investigación de diseño en el marco del campo disciplinar, resaltando la problemática particular de la inferencia bayesiana. La propuesta está fundamentada, principalmente, en un modelo epistemológico basado en prácticas, desde la socioepistemología, y guiada metodológicamente por la construcción de Trayectorias de Aprendizaje. Como resultado, se propone una trayectoria de desarrollo de prácticas para explorar la actividad estocástica de estudiantes de bachillerato sobre la inferencia binomial bayesiana. A manera de reflexión, planteamos que las tareas del diseño fomentan formas de razonamiento que subyacen a la visión bayesiana de la inferencia y se alinean con elementos de alfabetización estadística y probabilística para formar ciudadanos críticos. Una futura fase de implementación nos permitirá validar el diseño, más aún, robustecer el modelo epistemológico de partida.

Palabras clave: diseño didáctico; inferencia bayesiana; socioepistemología; teorema de bayes; trayectoria de desarrollo de prácticas

Abstract
In the context of the research whose interest is the creation of didactic strategies that favor stochastic ways of thinking, this article presents the first phase of a design research within the framework of the disciplinary field, highlighting the specific problem of Bayesian inference. The proposal is mainly based on an epistemological model based on practices, from socioepistemology, and methodologically guided by the construction of Learning Trajectories. As a result, a trajectory of practice development is proposed to explore the stochastic activity of high school students on Bayesian binomial inference. As a reflection, we posit that the design tasks foster forms of reasoning that underlie the Bayesian view of inference and align with elements of statistical and probabilistic literacy to form critical citizens. A future implementation phase will allow us to validate the design and, furthermore, to propose a more robust epistemological model.

Keywords: didactic design; bayesian inference; socioepistemology; bayes theorem; practices development trajectory

Introducción

Diversos estudios constatan que el razonamiento de las personas ante situaciones de incertidumbre es inconsistente, tanto en la infancia como en la adultez, es decir, sin importar su desarrollo cognitivo es posible identificar fragilidad en sus argumentaciones ante la toma de decisiones. Por ejemplo, se han detectado numerosos sesgos y obstáculos, concepciones intuitivas y el uso de esquemas heurísticos (Azcárate y Cardeñoso, 2011; Hernández-Solís, 2023; Kaplar et al., 2021). A su vez, el uso adecuado de la información estadística es hoy un factor esencial que garantiza el buen funcionamiento de cada ciudadano en la sociedad. Por este motivo, la necesidad de promover la educación estadística entre la población y la investigación en el sistema educativo.

En cuanto al escenario escolar, si bien ha habido un avance notorio a nivel internacional en la integración de la estadística y la probabilidad –estocástico– en el currículo, este no ha sido homogéneo en todos los países; ejemplo de ello es lo que resportan los estudios de Burrill (2023) y Vásquez y Cabrera (2022) que muestran el estado de la educación estocástica en diferentes países del mundo. Estos resultados son un indicador del esfuerzo de una comunidad por integrar esta área como un componente básico de la formación general de todo ciudadano; sin embargo, aún la forma de enseñanza de algunas nociones estocásticas sigue siendo limitada, por una parte, a su escasa investigación y, por otra, a la falta de estudios sobre el conocimiento del profesorado sobre estos conceptos y la presencia de sesgos en su enseñanza (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024; Cardeñoso et al., 2017; Rodríguez-Alveal et al., 2018).

Ante este panorama y la necesidad de que las personas estén capacitadas para leer, analizar y comprender información de manera crítica, han surgido iniciativas desde la investigación y la reflexión en la enseñanza de estocástico.

Uno de los llamados, durante las últimas dos décadas, ha sido a que la enseñanza de estocástico se centre más en *la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico y probabilístico* (Gal, 2002, 2005; Batanero et al., 2016; Borovcnik, 2016; Chance, 2002; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Wild y Pfannkuch, 1999), en vista de que el enfoque tradicional está centrado en procedimientos y cálculos, y esto no lleva a que el estudiantado desarrolle su pensamiento (Makar y Ben-Zvi, 2011).

Otro llamado ha sido enfocarse en promover las *ideas fundamentales* y sus interrelaciones en el entorno escolar (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Heitele, 1975; Watson, 2006), ya que la enseñanza de las nociones se considera fragmentada y no como una red de nociones. Incluso se recomienda impulsar estas ideas desde edades tempranas para avanzar en su desarrollo hacia lo formal (Batanero y Borovcnik, 2016).

La tercera iniciativa involucra los estándares GAISE (sigla en inglés de Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística), que proporcionan un marco desde la educación estocástica para ayudar al estudiantado a alcanzar conocimientos estocásticos tanto para su vida personal como profesional (Bargagliotti et al., 2020; Franklin et al., 2005; Metz, 2010).

Cada una de estas propuestas comparte el interés de promover una transformación en el enfoque de enseñanza de estocástico y de este modo generar alternativas de enseñanza que establezcan conexiones entre la escuela y la sociedad; que permitan potenciar el papel activo del ciudadano en la toma de decisiones en diversos ámbitos; que los ciudadanos sean capaces de comprender y usar la información y, sobre todo, tener una actitud crítica ante la inmensidad de datos que brindan los medios de comunicación en una sociedad de la información y del conocimiento.

En este contexto, comunicamos en el presente artículo la fase de planeación y diseño de una investigación (de diseño), ubicándola en el campo de la educación estadística, en particular, en la dirección de las investigaciones que se han ocupado de generar propuestas de enseñanza en las que se introducen formas más accesibles de inferencia estadística y se desarrollan elementos precursores. En nuestro caso, seguiremos la línea de la inferencia bayesiana.

Un acercamiento a la investigación sobre estadística bayesiana

Situados en las *ideas fundamentales de estadística o estocástico*, distintos autores han realizado propuestas al respecto de cuáles son las nociones esenciales por promover en la escuela (Batanero y Borovcnik, 2016; Burrill y Biehler, 2011; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Heitele, 1975; Watson, 2006). Una noción invariante en estos marcos es el concepto de *inferencia*, que tiene dos perspectivas, la clásica y la bayesiana, siendo esta última la de interés en el presente escrito. El enfoque bayesiano se diferencia del clásico en la forma en que asume y aborda la probabilidad, de ahí que importe mirar los resultados de investigación en esta perspectiva, teniendo en cuenta la probabilidad subjetiva o bayesiana.

En cuanto a la literatura sobre este contenido, si bien esta es diversa en sus objetos de estudio podemos organizarla en tres direcciones principales. Dos refieren a aspectos cognitivos y didácticos relacionadas directamente con la probabilidad bayesiana y una tercera se sitúa en aspectos didácticos-epistemológicos vinculados con la inferencia bayesiana a través del uso del teorema de Bayes.

La primera dirección refiere a la *identificación de sesgos, heurísticos y misconceptions*. Esta línea se ha encaminado en caracterizar los procesos mentales de los sujetos ante situaciones de incertidumbre y en reconocer mecanismos normativos en estas formas de razonamiento; producto de esto son las denominadas falacia de la tasa base (Tversky y Kahneman, 1974; Budgett y Pfannkuch, 2019), falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1989; León, 2008) y la falacia del eje del tiempo (Falk, 1986; Öçal, 2018) como sesgos que ocurren al enfrentarse a situaciones bayesianas. No obstante, un problema con este tipo de investigación es que se ha limitado a utilizar una clase de problemas y focalizado en el resultado de la resolución para evaluar el desempeño de las personas en un tipo particular de estimación de probabilidad *a posteriori* (Mandel, 2014).

La segunda ruta de investigación se orienta a *los procesos de instrucción*. Se trata de estudios que amplían las consideraciones cognitivas y consideran la complejidad del escenario didáctico, por ejemplo, la relación del teorema con otras nociones probabilísticas que resultan en sí mismas complejas. En esta ruta, se encuentran los estudios interesados en reconocer errores del estudiantado (Huerta y Arnau, 2017) o las estrategias que emergen y su naturaleza en la resolución de problemas bayesianos (Eichler et al., 2020); también se han identificado trabajos sobre análisis de contenido de la probabilidad subjetiva y las características de las tareas en libros de texto, como recursos que apoyan los procesos de enseñanza (Carranza, 2014). De este tipo de investigación destaca un mayor desarrollo de estudios sobre la perspectiva frecuencial de la inferencia frente a la bayesiana; y de esta última, un enfoque de enseñanza mecanicista y la naturaleza aritmética, más que probabilística, de las tareas.

El tercer camino se sitúa entre *la historia y la epistemología y la implementación de innovaciones didácticas*. Por una parte, las investigaciones cuyo eje es reconocer elementos epistémicos propios de la probabilidad subjetiva a través de estudios históricos (Borovcnik y Kapadia, 2014; Paredes, 2018); y por otra, el uso de estos resultados como fundamento para la intervención en aula a través del diseño de tareas (Carranza, 2009; Kazak, 2015). A diferencia de las rutas anteriores, este tipo de investigación proporciona elementos característicos del contenido que precisan explorarse en entornos escolares a través de investigaciones de diseño para crear marcos que brinden formas de desarrollo del pensamiento bayesiano en el estudiantado.

De entre estas direcciones, la primera es la que ha sobresalido en la investigación, principalmente, por el estudio de los recursos semióticos –formato numérico y las representaciones visuales– como estrategia en la resolución de problemas bayesianos para atender la falacia de la tasa base (Cui et al., 2023). Las dos restantes líneas están en desarrollo y, en particular, la tercera línea se elige como la ruta para transitar entre el planteamiento de un modelo epistemológico (Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa, en prensa) y su uso para fundamentar la intervención didáctica –parte de lo que aquí se reporta–.

Problemática

En el marco de la literatura sobre estadística bayesiana, reconocemos dos fenómenos didácticos: el primero, *la aritmetización de la probabilidad subjetiva o bayesiana*; y el segundo, *el predominio de la perspectiva clásica de la inferencia sobre el enfoque bayesiano*.

Referente a la primera problemática, diversos estudios, tanto en el contexto internacional, como en el mexicano, proporcionan evidencia sobre la focalización en el aprendizaje de técnicas y procedimientos sobre este contenido. Por ejemplo, Carranza (2014) reporta en su estudio sobre libros de textos franceses que las tareas o problemas bayesianos están orientados a cálculos. En el caso español, Lonjedo Vincent et al. (2012) destacan que las tareas relacionadas con el teorema de Bayes son de naturaleza mecanicista, donde la probabilidad *a posteriori* es calculada a partir de las tres probabilidades proporcionadas por el problema, de modo que la asignación subjetiva de la probabilidad es invalidada, así como la revisión de la probabilidad a partir de nueva evidencia.

En México, el estudio de Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa (en revisión) da cuenta, a partir del análisis de la actividad estocástica de tareas en una muestra de libros de texto, que la probabilidad bayesiana como medida de incertidumbre se reduce al proceso algorítmico de manipulación de valores numéricos en la regla de Bayes para obtener el valor numérico de una probabilidad desconocida. Cabe señalar que el tipo de tareas identificadas en los libros se corresponde con el tipo de problemas ampliamente usados en las investigaciones psicológicas, de modo que, tanto en la investigación como en la enseñanza, las tareas de "evaluación[i]" de probabilidad destacan sobre las tareas de "actualización[ii]" en relación con el razonamiento bayesiano (Lonjedo Vincent et al., 2012; Mandel, 2014).

Acerca de la segunda problemática, estudios como los de Barragués y Guisasola (2006), Borovcnik (2021) y Carranza y Fuentealba (2010) reportan que la enseñanza de la inferencia es sesgada al propiciar principalmente la inferencia clásica, aun siendo el enfoque bayesiano más intuitivo o cercano a las formas de razonamiento de las personas (Borovcnik, 2012; Chernoff, 2008; Devlin, 2014; Rossman, 2008). Otro aspecto, es la falta de trabajo sobre el vínculo de la probabilidad con la inferencia (Borovcnik, 2012; Vancsó et al., 2021); incluso en el contexto mexicano, el estudio de Inzunza Cazares y Rocha Ruiz (2021) reconoce que se han incorporado las ideas fundamentales de estocástico en los diversos niveles educativos, sin embargo, en el bachillerato, identifican la ausencia de la inferencia, la cual es una noción ampliamente recomendada en el currículo internacional y por los educadores estadísticos.

Ante esta situación, se considera relevante la puesta en marcha de investigaciones que no solamente se preocupen en la identificación de sesgos y falacias, o en el reconocimiento de dificultades y errores de los alumnos en la resolución de tareas, como está sucediendo en la investigación sobre la estadística bayesiana; sino también en el diseño de materiales o dispositivos que favorezcan el desarrollo del pensamiento estocástico de los individuos en relación con la inferencia (véase Carranza, 2009; Estrella et al., 2023; Figueroa y Distéfano, 2023) y, en específico, prestando especial atención a la actualización de probabilidades, ya que es un tipo de tarea poco explorada en el ámbito del razonamiento bayesiano.

Por último, Bakker y Derry (2011) han señalado que uno de los desafíos de la enseñanza y aprendizaje de estocástico es que su práctica ha sido atomista. Por tanto, para abonar al cambio de la enseñanza de estocástico de un enfoque centrado en los procedimientos a uno más holístico y orientado al desarrollo de la alfabetización, razonamiento o pensamiento estadístico y/o probabilístico; en esta dirección, el objetivo del artículo es presentar una propuesta de diseño fundamentada teóricamente en elementos epistémicos sobre la inferencia bayesiana para el caso binomial.

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO: CONSTRUCCIÓN DE UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE

La investigación de diseño tiene como objetivo crear ecologías de aprendizaje para desarrollar teorías de dominio específico y explorar las formas de aprendizaje que estas ecologías fomentan (Gravemeijer y Cobb, 2006). En este sentido, su propósito es analizar el aprendizaje en contexto, diseñando y probando sistemáticamente estrategias o herramientas de instrucción específicas que lleve al desarrollo de teorías fundadas empíricamente.

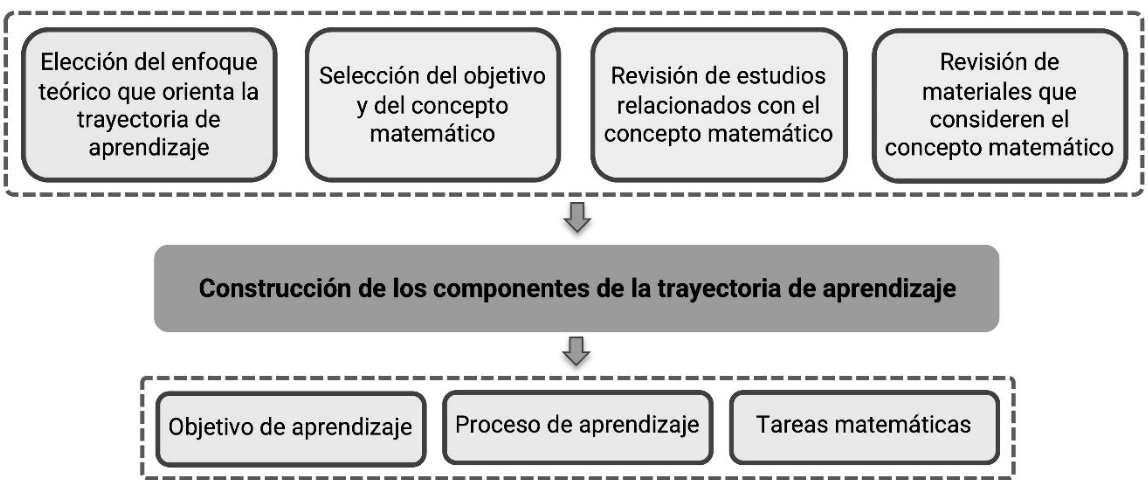
Este tipo de investigación se constituye de ciclos de tres fases: preparación y diseño, implementación del diseño y análisis retrospectivo. La primera etapa implica el diseño instruccional vertebrado por la construcción de una trayectoria de aprendizaje; la segunda etapa consiste en la puesta en escena del instrumento de investigación; y la tercera etapa, el análisis con base en los aspectos teóricos (Bakker y van Eerde, 2014).

En el presente artículo se reporta la primera etapa de una *Investigación de Diseño* que busca caracterizar la actividad estocástica del estudiantado de bachillerato sobre la inferencia bayesiana. Así, desarrollamos la correspondiente trayectoria de aprendizaje, como pieza teórica esencial en todo estudio de diseño, pues juega un rol específico en cada una de las fases. Esta puede considerarse como un proceso conjeturado sobre cómo podría evolucionar el pensamiento del estudiantado ante tareas o problemas asociadas a una noción específica. La trayectoria tiene tres componentes: un proceso de aprendizaje, el objetivo de aprendizaje y las tareas matemáticas.

Para la generación de la trayectoria, se sigue el modelo de construcción de trayectorias de aprendizaje de Cárcamo y Fuentealba (2023) (Figura 1). La definición de esta, su posterior implementación y análisis, constituyen un ciclo de la investigación de diseño.

Figura 1

Modelo para la construcción de trayectorias de aprendizaje



Nota. Adaptado de Cárcamo y Fuentealba (2023).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS: UNA PERSPECTIVA DE PRÁCTICAS

Como referente principal que orienta teóricamente la trayectoria, se contempla una perspectiva social con enfoque en prácticas matemáticas, a saber, la socioepistemología.

Las prácticas matemáticas desde la socioepistemología

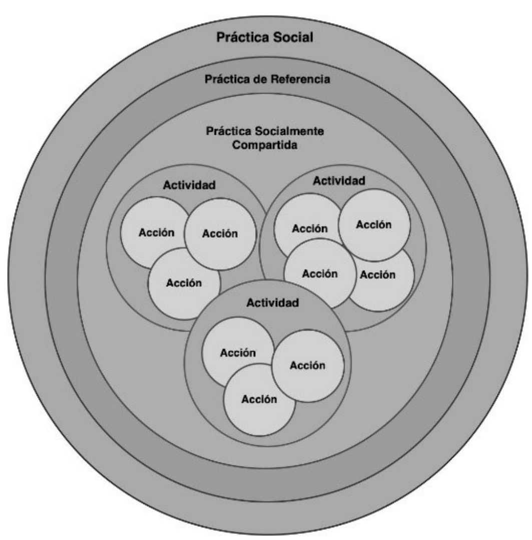
En la Matemática Educativa, la socioepistemología es una perspectiva teórica que, desde un paradigma social, cambió su foco de atención a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de los conceptos, al estudiar los procesos de construcción de conocimiento matemático dentro y fuera de la escuela; pues reconoció desde sus inicios que "la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 36).

Esta teoría retoma de las Ciencias Sociales y las Humanidades "el dominio privilegiado de las prácticas y la construcción de significados compartidos" (Cantoral et al., 2015), de ahí que en un sentido amplio se puedan entender a las prácticas como *arreglos de actividad humana* (Schatzki, 2001) o como aquello *que se hace* y *se dice* organizado por normas, conocimientos prácticos y generales, y fines, proyectos, tareas y emociones prescritos o aceptables (Schatzki, 2017). Para atender la particularidad de la matemática, la socioepistemología partió de estudiar *el uso del conocimiento* matemático en estas prácticas y de reconocer el rol que juega el contexto –el escenario y sus condiciones sociales y culturales– en su organización.

Así, la socioepistemología declara su objeto de estudio como: la *construcción social del conocimiento matemático* y su *difusión institucional* (Cantoral, 2020); y se ha ocupado de modelar dicha construcción en diversos escenarios –históricos, culturales, profesionales, escolares, etc.–. Producto de los resultados de investigación y la evidencia empírica, se llegó al desarrollo de un *modelo de anidación de prácticas matemáticas* (Figura 2) que expresa las dinámicas de las formas de pensar y actuar –prácticas matemáticas– que pone en juego el sujeto en relación con un saber matemático para atender a una tarea en un escenario específico.

Figura 2

Modelo de anidación de prácticas matemáticas desde la socioepistemología



Nota. Adaptado de Cantoral (2020)

El modelo tiene cinco categorías, dependiendo del escenario de investigación y el objeto de estudio son las capas que se consideran para analizar o explicar la organización de la actividad matemática del sujeto de forma situada. Como categoría básica se encuentran las *acciones* y como superior la *práctica social*, pasando por tres niveles intermedios de organización denominados *actividad*, *práctica socialmente compartida* y *práctica de referencia* (Cantoral, 2020).

Las prácticas estocásticas relativas a la inferencia bayesiana

La inferencia estadística en términos generales puede considerarse como “un resultado y un proceso razonado de creación o prueba de generalizaciones probabilísticas a partir de datos” (Makar y Rubín, 2009, p. 85). Para hacer frente a la investigación sobre esta noción, se han configurado modelos teóricos para promoverla en el escenario escolar, incluso en edades tempranas, y estudiar lo que estos marcos producen. Uno de los más utilizados ha sido la propuesta de estos autores sobre la *inferencia estadística informal*; sin embargo, este marco según Borovcnik (2019) se basa fuertemente en la perspectiva clásica o frecuencial de la inferencia.

Dado nuestro interés en la inferencia de naturaleza bayesiana, se retoma el modelo epistemológico (Figura 3) propuesto por Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa (en prensa) porque ofrece un modelo de la organización de la actividad estocástica que acompaña la resolución de tareas bayesianas sobre estimación de parámetros desconocidos, lo que resulta un referente sobre cómo poder gestionar esta forma de inferencia en el entorno escolar a través de la actualización de probabilidades.

Figura 3

Modelo epistemológico basado en prácticas sobre la inferencia bayesiana

Nota. Elaborado con base en Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa (en prensa).

En el contexto de la estimación del parámetro desconocido θ–proporción o probabilidad– en situaciones binomiales, el modelo de la Figura 3 devela las prácticas estocásticas implicadas y su organización, en el marco de la actividad estocástica que promueven problemas de inferencia binomial bayesiana que hacen uso del teorema de Bayes.

Finalmente, el modelo epistemológico a nivel instruccional tiene dos funciones: por una parte, es un referente para el diseño de tareas y, por otro, es un marco para interpretar la actividad estocástica de estudiantes en tareas inferenciales de naturaleza bayesiana. En este caso, se empleará en línea con su primera función.

DISEÑO INSTRUCCIONAL SOBRE LA INFERENCIA BINOMIAL BAYESIANA

El diseño instruccional emerge como iniciativa para hacer frente a los fenómenos didácticos de la *aritmetización de la probabilidad subjetiva* y la *centración en la perspectiva frecuencial de la inferencia*; con ello se apunta a la construcción de propuestas para el aula que favorezcan formas de pensamiento propias del saber estocástico en juego, más allá de procedimientos y técnicas. Asimismo, comenzar a comprender la actividad estocástica de estudiantes del bachillerato mexicano ante tareas bayesianas de inferencia para el caso binomial.

Es importante resaltar que los diseños didácticos en términos de la investigación de diseño se consideran como instrumentos de investigación (Watson y Ohtani, 2015), por tanto, resulta esencial hacer explícito su fundamento. A continuación, se detalla el diseño instruccional en cuanto a los elementos de la trayectoria de aprendizaje.

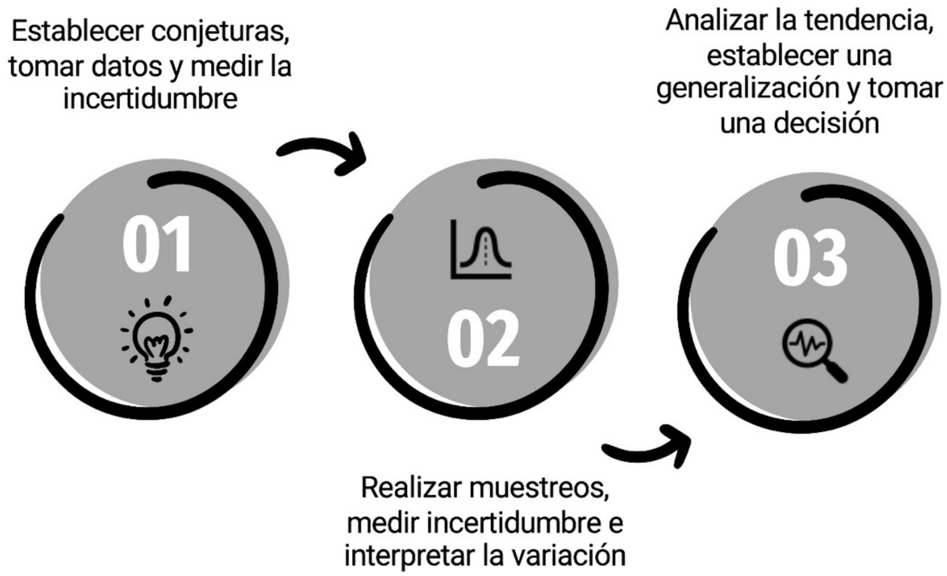
Trayectoria de desarrollo de prácticas

Lobato y Walters (2017) afirman que el fenómeno captado por la trayectoria de aprendizaje es multidimensional y, principalmente, está permeada por la perspectiva teórica que se adopte. Por este motivo, acorde con las consideraciones teóricas se ha denominado a la trayectoria de aprendizaje como *trayectoria de desarrollo de prácticas*. Se entenderá como una organización intencionada de *prácticas matemáticas* que anteceden y acompañan la construcción situada de conocimiento matemático y sus significados a partir del *uso* por parte de los sujetos.

En este caso, la *trayectoria de desarrollo de prácticas* se estructura y sustenta en el modelo epistemológico basado en prácticas sobre la inferencia binomial bayesiana (Figura 3). A partir de este y considerando primordialmente los niveles de la práctica *acción-actividad*, se ha definido un proceso de tres pasos que ilustra la posible organización de la actividad estocástica de estudiantes de bachillerato ante tareas de inferencia bayesiana (Figura 4).

Figura 4

Trayectoria de desarrollo de prácticas relativa a la inferencia bayesiana



Nota. Elaboración propia.

En el momento 1 se considera la siguiente hipótesis: el estudiantado establecerá modelos de *probabilidad inicial* referente al parámetro desconocido θ con base en sus conocimientos; luego de establecer su conjetura y ante la necesidad de tener información sobre el suceso, obtendrá datos a partir de experimentación física con el artefacto aleatorio; por último, teniendo en cuenta estas dos fuentes de información, postulará un modelo de *probabilidad a posteriori* sobre el parámetro desconocido. A partir del modelo a posteriori se espera emerjan afirmaciones con grados de incertidumbre sobre el suceso.

En el momento 2, la hipótesis es que el estudiantado advierte la necesidad de nueva información sobre el suceso y derivado de ello lleven a cabo muestreos donde el tamaño de la muestra sea diferente; luego, actualice por cada muestra de datos el modelo de *probabilidad a posteriori* considerando cada vez el modelo previo. Por último, se espera que sea consciente de la variación presente en cada una de las muestras y esto se vea implicado en sus afirmaciones sobre el nivel de confianza en relación con la ocurrencia del suceso desconocido.

En el momento 3, la hipótesis es que el estudiantado reconozca el patrón de comportamiento en el nivel de confianza establecido en todos los modelos (*a priori* y *a posteriori*) a medida que aumenta el tamaño de la muestra; seguido establezca una generalización probabilística basada en ambas fuentes de información sobre el suceso de interés haciendo explícito el grado de incertidumbre; finalmente tome una decisión en el contexto de la tarea considerando la estimación –inferencia– realizada.

Componentes del diseño didáctico

Continuando con los elementos del diseño instruccional, el diseño didáctico se sustenta en cinco componentes (Figura 5) siguiendo la propuesta de entornos o ecologías de aprendizaje para la educación estadística (Ben-Zvi et al., 2018). Es importante mencionar que los elementos contemplados son parte del proceso de toma de decisión en la investigación a propósito de las consideraciones teóricas y la literatura sobre la estadística bayesiana.

Figura 5

Componentes del diseño didáctico

Nota. Elaboración propia

El primer componente es la centración en una *idea fundamental de estocástico*. Esto apunta al desarrollo de ideas claves y su interrelación más allá de los procedimientos. Para este caso, se retoma el modelo epistemológico basado en prácticas sobre la inferencia bayesiana (Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa, en prensa), el cual muestra, por una parte, la organización del hacer estocástico y, por otra, deja ver la movilización de nociones como datos, distribución y muestreo. En términos del diseño, el modelo teórico es un referente para sustentar la propuesta, así como definir y elaborar las tareas que la componen.

El segundo componente es la integración de un *contexto*. En este caso, el contexto no solo es un factor indispensable dada la perspectiva teórica, sino incluso porque se ha reportado en la investigación en educación estadística como una parte sustancial de la inferencia (véase Pfannkuch, 2011). Desde el punto de vista de la propuesta, esto se refleja en la consideración de los juegos de azar como contexto situacional que enmarca cada una de las tareas del diseño, y el trabajo con situaciones binomiales de parámetro desconocido θ como contexto de la situación específica que delinea un tipo de actividad estocástica (Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa, 2023, en prensa).

El tercer componente es la inclusión de *herramientas tecnológicas*. Esto atiende a las sugerencias de la comunidad de educadores estadísticos de integrar tecnología (como calculadoras gráficas, software estadístico o applets) que permitan explorar y analizar datos. En particular, se ha reportado fuertemente que uno de los potenciales de estas herramientas es la posibilidad de la simulación (Biehler, 2012; Ireland y Watson, 2009; Konold et al., 2011). En materia del diseño, se refleja en el uso del software estadístico libre CODAP, que permitirá realizar simulaciones de muestras grandes debido a las limitaciones de llevarlo a cabo mediante artefactos aleatorios físicos. Asimismo, esto ayudará al desarrollo de nociones como la variabilidad, la distribución y la visualización de datos.

El cuarto componente es la consideración del *formato numérico de la información estadística*. Investigaciones sobre la probabilidad subjetiva o bayesiana sugieren el manejo del formato de frecuencia absoluta o frecuencias naturales en lugar de porcentaje y probabilidades puesto que se asemeja más a la forma en que se recopila información (Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Hoffrage et al., 2002; Lonjedo y Huerta, 2005). En este sentido, en el diseño se promueve principalmente el formato de frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

El quinto componente y último es el manejo de una *representación visual*. El elemento visual es más accesible que el analítico en la comprensión de conceptos probabilísticos; además, la construcción de tablas y gráficos son instrumentos de trasnumeración que apoyan y dan forma al análisis de datos (Arteaga et al., 2011; Wild y Pfannkuch, 1999). Por tanto, en las tareas se promueven representaciones a través de la simulación física y mediante tecnología para la organización, descripción y análisis de datos.

Tareas del diseño didáctico

El diseño didáctico toma como referente la propuesta de Kazak (2015) y se estructura en tres partes siguiendo la trayectoria de desarrollo de prácticas (Figura 4). Esta tiene como eje la *actualización de la probabilidad*, es decir, promover el carácter dinámico y secuencial del teorema de Bayes, el cual permite relacionar la probabilidad con la inferencia e ir más allá del trabajo procedimental. Además, se contempla un acercamiento informal que parte de promover razonamientos subyacentes a las ideas relacionadas con la inferencia bayesiana sobre la base del conocimiento del estudiantado.

El *objetivo de aprendizaje* se definió considerando la literatura sobre el tema y este es que: los estudiantes establezcan modelos de *probabilidad a priori* y transiten a modelos *a posteriori* mediante observaciones del suceso, con la finalidad de realizar inferencias en situaciones binomiales sobre el parámetro desconocida θ –proporción o probabilidad– y llevar a cabo toma de decisiones basadas en los datos sobre el juego de “Las fichas coincidentes”.

La población objetivo que pretende atender el diseño es el estudiantado de entre 16 y 18 años que cursan la asignatura de estadística y probabilidad en subsistemas de bachillerato en México, puesto que la enseñanza del teorema de Bayes aparece en el currículo de este nivel (Secretaría de Educación Pública, 2017), lo que lo convierte en un punto de partida para explorar estas ideas.

La tarea central del diseño está contextualizada en un juego de azar que contempla una situación binomial de parámetro desconocido, en este caso, la proporción de fichas. El juego plantea a los jugadores averiguar con qué artefacto aleatorio, de entre dos opciones (Bolsas A o B), es conveniente participar en el juego de "Las fichas coincidentes" (Figura 6). El fin del juego es estimar la proporción de fichas en los pares de bolsas (desconocido para los jugadores) y con ello decidir sobre la equidad del juego.

Figura 6

Tarea principal del diseño didáctico

Un juego en el stand de la feria es el juego de *Las fichas coincidentes*. Para este juego se tienen dos pares de bolsas y cada una contiene cuatro fichas que pueden ser de color rojo y/o azul.

El juego de *Las fichas coincidentes* consiste en seleccionar un par de Bolsas (A o B) y extraer una ficha al azar de cada bolsa del par seleccionado. Si ambas fichas son del mismo color el jugador gana; en caso contrario, si son mezclados, la casa de juegos gana. Cabe destacar que las fichas deben regresarse a su bolsa original después de cada ronda.

Descifra si conviene participar en el juego con las Bolsas A o B

Nota. Adaptado de Kazak

A continuación, se presentan las seis tareas que componen el diseño didáctico "Decidiendo sobre el juego justo". Como variable didáctica se han considerado las siguientes proporciones de fichas por bolsa: Bolsas A (3 fichas rojas / 1 ficha azul, 1 ficha roja / 3 fichas azules) y Bolsas B (3 fichas rojas / 1 ficha azul, 2 fichas rojas / 2 fichas azules).

Momento 1

El momento uno del diseño es de dos tareas y tiene estos objetivos: 1) *establecer el grado de incertidumbre sobre la equidad del juego en relación con la proporción desconocida de fichas en las Bolsas A o B*; 2) *interpretar la medida de incertidumbre en cuanto al juego de azar, es decir, el grado de credibilidad sobre si el juego es justo o injusto*.

La tarea uno (Figura 7) tiene la intención de que los estudiantes establezcan asignaciones cualitativas de probabilidad subjetiva respecto del suceso de interés, en este caso, la equidad del juego con las Bolsas A. En este aspecto, el inciso a) busca que se establezca una conjetura y se expliciten los argumentos que la sustentan. El inciso b) pretende que se vincule un nivel de credibilidad (grado de incertidumbre) a la conjetura hecha. Esto conformará el modelo de probabilidad inicial sobre el parámetro desconocido.

Figura 7

Tarea uno del primer momento del diseño

1. Formulando conjeturas

Considera en esta etapa, el par de **Bolsas A**:

a) ¿Piensas que el juego con las Bolsas A es justo?, ¿por qué?

b) En la siguiente escala, marca con una **X** el punto que mejor representa qué tan seguro estás de que el juego es justo.

Nada seguro — Poco seguro — Más o menos seguro — Muy seguro — Totalmente seguro

Nota. Elaboración propia

La tarea dos (Figura 8) tiene como propósito obtener datos mediante la experimentación física con el artefacto aleatorio (bolsas con fichas) y establecer un nuevo modelo sobre el suceso de interés (*a posteriori*). El inciso a) incentiva la experimentación para obtener resultados sobre el juego; el número de rondas decidido por el jugador define una muestra. La pregunta b) propone el establecimiento de registros de organización de la información. En el caso de c), propone postular un nuevo nivel de seguridad sobre la equidad del juego –modelo *a posteriori*– contemplando tanto el modelo inicial como la evidencia recolectada. Además, se espera que parte de esta información sea el argumento que sustenta su nivel de credibilidad (inciso d).

Figura 8

Tarea dos del primer momento del diseño

2. Usando datos y sacando conclusiones

a) Decide cuántas rondas del juego quieres llevar a cabo, menor a 10 (ten en cuenta que la extracción de un par de fichas define una ronda del juego).

b) Lleva a cabo una experiencia con el número de rondas decidido. Establece un registro de los resultados y determina el número de veces que resultó "mismo color" y "mezclado".

c) Después de esta experiencia de juego (extraer una ficha de cada bolsa un número determinado de veces), marca con una **X** el punto en la escala que mejor representa qué tan seguro estás de que el juego es justo:

Nada seguro — Poco seguro — Más o menos seguro — Muy seguro — Totalmente seguro

d) ¿A qué se debe la ubicación del punto en esa parte de la escala?

e) Si de nueva cuenta desarrollaras el juego con el mismo número de rondas anterior, ¿a qué conclusión llegarías sobre si el juego con el par de Bolsas A es justo?, ¿por qué?

f) Desarrolla de nuevo el proceso de 2b) y 2c) y establece tus conclusiones.

Nada seguro — Poco seguro — Más o menos seguro — Muy seguro — Totalmente seguro

g) ¿Qué te daría mayor certeza para tomar la decisión de si el juego con el par de Bolsas A es justo/injusto?

Nota. Elaboración propia.

Las preguntas restantes (e-g) buscan generar un nuevo ciclo de toma de datos y postulación de un modelo de *probabilidad a posteriori*. En particular, se espera que se comience a hacer consciencia de la variabilidad de los resultados aun considerando el mismo número de rondas y su implicación en el nivel de credibilidad sobre la equidad del juego. Finalmente, incentivar a la toma de más datos que generen muestras de tamaño mayor (inciso g).

Momento 2

El segundo momento del diseño está asociado con el paso dos de la trayectoria. Se conforma de dos tareas y tiene los siguientes objetivos: 1) *establecer nuevos grados de incertidumbre sobre la equidad del juego considerando diferentes muestras de datos (resultados sobre fichas del mismo color o mezclado, o el número de ganes o pierdes)*; 2) *interpretar la medida de incertidumbre en relación con la progresión de muestreo y la variabilidad*.

La tarea tres (Figura 9) pretende analizar muestras de datos de diferentes tamaños generadas mediante simulación a través de tecnología. En este panorama, el inciso a) busca que mediante el empleo del software CODAP a través del plugin ya configurado, se decida un tamaño de muestra para diferentes experiencias del juego con las Bolsas A y se lleve a cabo la simulación. En la tabla del inciso b), los resultados deben ser registrados y después del análisis de datos, es necesario definir un nivel de credibilidad personal sobre la equidad del juego con base en los modelos previos y la nueva evidencia.

Figura 9

Tarea tres del segundo momento del diseño

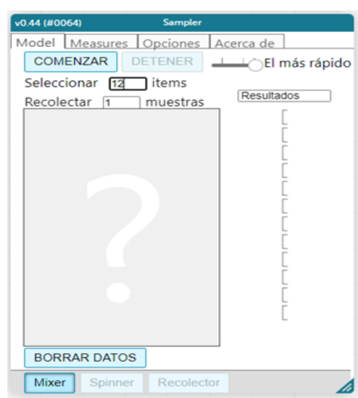
3. Analizando casos

a) Con apoyo del *software CODAP* simula el juego con el par de Bolsas A. Lleva a cabo cuatro diferentes experiencias con el siguiente número de rondas:

- Experiencia 1: realizar el juego entre 45 y 90 rondas.
- Experiencia 2: realizar el juego entre 450 y 900 rondas.
- Experiencia 3: realizar el juego entre 4500 y 9000 rondas.
- Experiencia 4: realizar el juego entre 45000 y 90000 rondas.

b) Para cada una de las experiencias llena la siguiente tabla:

Experiencia	Nº de rondas	Nº de veces "mismo color"	Nº de veces "mezclado"
1			
	¿Qué tan seguro estás de que el juego con el par de Bolsas A es justo/injusto? Nada seguro – Poco seguro – Más o menos seguro – Muy seguro – Totalmente seguro		
2			
	¿Qué tan seguro estás de que el juego con el par de Bolsas A es justo/injusto? Nada seguro – Poco seguro – Más o menos seguro – Muy seguro – Totalmente seguro		
3			
	¿Qué tan seguro estás de que el juego con el par de Bolsas A es justo/injusto? Nada seguro – Poco seguro – Más o menos seguro – Muy seguro – Totalmente seguro		
4			
	¿Qué tan seguro estás de que el juego con el par de Bolsas A es justo/injusto? Nada seguro – Poco seguro – Más o menos seguro – Muy seguro – Totalmente seguro		



Nota. Elaboración propia.

La tarea cuatro (Figura 10) pretende analizar todos los modelos sobre la equidad del juego con las Bolsas A y estimar la proporción de las fichas en este par de bolsas. Por ello, las preguntas a) y b) pretenden recuperar la decisión final sobre la apreciación personal del juego justo y su nivel de credibilidad (grado de incertidumbre). Las consignas c) y d) intentan hacer explícito el cambio del nivel de seguridad como efecto de la variabilidad de los datos según el tamaño de la muestra y el modelo previo establecido.

Figura 10

Tarea cuatro del segundo momento del diseño

4. Contrastando las experiencias del juego

a) Considerando tu opinión inicial y las diferentes experiencias desarrolladas, ¿piensas que el juego con el par de Bolsas A es justo?, ¿por qué?

b) ¿Qué tan seguro estás hasta este momento de que el juego con las Bolsas A es justo?, ¿por qué?

c) ¿Tu decisión y confianza en la equidad del juego, se mantuvo a lo largo de las diferentes experiencias en comparación con lo establecido al inicio del juego (inciso 1b)?, ¿por qué?

d) ¿Con base en qué decidiste si el juego con las Bolsas A es justo?

e) Si en cada bolsa hay cuatro fichas, ¿cuál consideras que es la composición de fichas por color en cada bolsa?

f) ¿Habrías dicho esta misma composición de fichas si solo hubieras conocido los resultados de las experiencias iniciales (2b y 2f)? Explica para cada caso.

Nota. Elaboración propia.

El inciso e) pide la estimación de la proporción de fichas en las Bolsas A a partir del patrón de comportamiento identificado; es importante considerar que la equidad del juego debe estar asociado con un espacio muestral equiprobable. Por último, el inciso f) pretende reconocer la relatividad de las asignaciones subjetivas sobre la probabilidad de que el juego con las Bolsas A sea justo en dependencia de la cantidad de información que se conoce sobre el suceso.

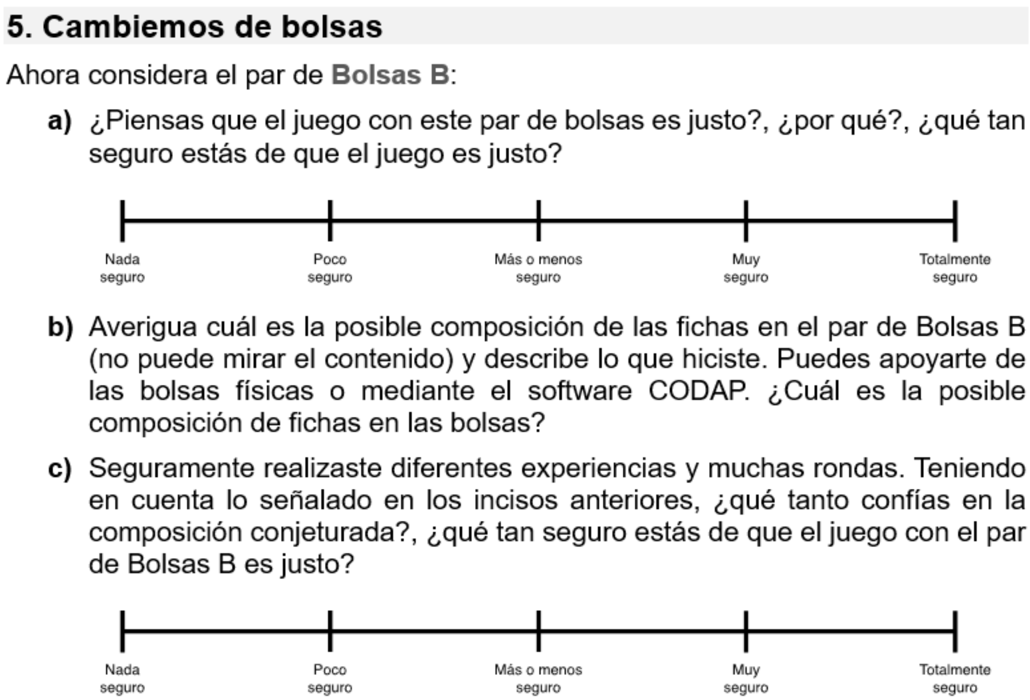
Momento 3

El momento tres del diseño es de dos tareas y tiene estos objetivos: 1) *estimar con un grado de incertidumbre la "verdadera proporción del par de Bolsas A o B" mediante la generalización de la tendencia de los grados de credibilidad*; 2) *tomar una decisión basada en la probabilidad sobre la base de la equidad del juego para seleccionar aquel en el que conviene jugar.*

La tarea cinco (Figura 11) pretende que se estime con cierto grado de incertidumbre la proporción de las fichas en las Bolsas B. De nueva cuenta, a través del inciso a) se cuestiona sobre un modelo inicial sobre la probabilidad de que el juego con las Bolsas B sea justo. Posteriormente, la pregunta b) incentiva a averiguar la proporción posible de las bolsas usando la simulación física o mediante tecnología; se espera que el tamaño de la muestra juegue un papel fundamental en la indagación de la proporción de fichas y a partir de estas se establezca la generalización. Finalmente, la consigna c) solicita explicitar el nivel de seguridad asociado a la conjetura sobre la equidad del juego con el par de Bolsas B.

Figura 11

Tarea cinco del tercer momento del diseño



5. Cambiemos de bolsas

Ahora considera el par de **Bolsas B**:

a) ¿Piensas que el juego con este par de bolsas es justo?, ¿por qué?, ¿qué tan seguro estás de que el juego es justo?

Nada seguro — Poco seguro — Más o menos seguro — Muy seguro — Totalmente seguro

b) Averigua cuál es la posible composición de las fichas en el par de Bolsas B (no puede mirar el contenido) y describe lo que hiciste. Puedes apoyarte de las bolsas físicas o mediante el software CODAP. ¿Cuál es la posible composición de fichas en las bolsas?

c) Seguramente realizaste diferentes experiencias y muchas rondas. Teniendo en cuenta lo señalado en los incisos anteriores, ¿qué tanto confías en la composición conjeturada?, ¿qué tan seguro estás de que el juego con el par de Bolsas B es justo?

Nada seguro — Poco seguro — Más o menos seguro — Muy seguro — Totalmente seguro

Nota. Elaboración propia.

La tarea seis (Figura 12) tiene como intención contrastar las proporciones estimadas de los pares de Bolsas A y B (o lo que es equivalente, la conjetura sobre la equidad) y decidir la opción conveniente al jugador para participar en el juego de *Las fichas coincidentes*. Por tanto, la pregunta a) se dirige a la comparación de la conclusión a la que se llegó en cada situación. En el caso de la consigna b) se busca la toma de una decisión sobre el par de bolsas "más conveniente" en función del nivel de seguridad asignado a la equidad del juego. El inciso c) invita a reflexionar sobre las condiciones que debe tener el modelo, es decir, la proporción de fichas en las bolsas para que un juego sea justo.

Figura 12

Tarea seis del tercer momento del diseño

6. Tomando una decisión sobre el juego

a) ¿A qué conclusión llegaste sobre la equidad del juego usando el par de Bolsas A o B?, ¿por qué?

b) Entonces, ¿con cuál par de bolsas consideras que es más conveniente participar en el juego?, ¿a qué se debe tu decisión?

c) ¿Cómo podría hacerse para que este tipo de juego sea justo siempre?

Nota. Elaboración propia.

Al cierre del diseño, se sugiere hacer visible la composición de fichas de ambos pares de bolsas para que los estudiantes constaten las proporciones originales y comparen con sus estimaciones finales.

REFLEXIONES FINALES

Según Cárcamo y Fuentealba (2023), casi todas las trayectorias de aprendizaje se fundamentan en enfoques cognitivos, por lo que, con el presente artículo buscamos aportar con la construcción de una trayectoria basada en un enfoque distinto, en específico, contemplando una perspectiva sociocultural basada en prácticas estocásticas.

En cuanto al diseño didáctico, este busca contribuir en la elaboración de tareas denominadas por Ainley y Pratt (2001) como "tareas orientadas a conceptos", es decir, tareas que favorezcan el análisis de los procesos estadísticos, el papel de la probabilidad como herramienta para la estadística y el contexto de los datos como referente para el desarrollo de significado. A su vez, a través de la actividad estocástica que intenciona el diseño, subyace el significado de la probabilidad subjetiva o bayesiana como grado de creencia a través de la asignación personal de probabilidad (Batanero, 2005; Rivadulla, 1995) lo que, sostenemos, apoya a ampliar y enriquecer el significado de la probabilidad solo como algoritmo de cálculo (Carranza, 2014; Lonjedo Vincent et al., 2012).

Otras potencialidades del diseño son que incorpora algunos indicadores de diversos marcos estándares para enseñar la educación estocástica. Por ejemplo, en materia de alfabetización estadística y probabilística (Gal, 2002, 2005) se identifican algunos componentes como: "conocimiento estadístico" con ideas relativas a gráficos, tablas y su interpretación; "grandes ideas" con la consideración de nociones como variación y predicción/incertidumbre; y "lenguaje" a través de la argumentación y la asignación de probabilidades.

Asimismo, desde el punto de las ideas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011), las nociones de datos, distribución, variación, muestreo y probabilidad son tomadas en cuenta para favorecer razonamientos asociados a la inferencia bayesiana para el caso binomial. Por último, el uso de tecnología y la simulación es otro componente que podemos apreciar compatible con los señalamientos de la investigación y currículos (NCTM, 2000; Bargagliotti et al., 2020).

En suma, el diseño didáctico valoramos que apunta al desarrollo de la alfabetización, tanto estadística como probabilística en el estudiantado al incorporar indicadores de estos constructos (interpretación y construcción de gráficos estadísticos y tablas, análisis de la variabilidad, lenguaje probabilístico, etc.); por ende, contribuye a potenciar el pensamiento crítico en la ciudadanía como un componente esencial de esta área. Adicionalmente, el diseño resulta un referente sobre cómo favorecer las ideas bayesianas en el entorno escolar, poniendo énfasis en la actualización de probabilidades, tipo de enfoque poco explorado para estudiar el razonamiento bayesiano.

Finalmente, propiciar la interpretación bayesiana de la inferencia permitirá desarrollar una forma de pensamiento más integral y horizontal de las dos perspectivas que integran dicha noción, de modo que las personas podrán discernir en su actividad diaria sobre la mejor forma de enfrentar una situación de incertidumbre y construir significados más robustos.

Si bien hay una intención de analizar la implementación con el marco teórico de la socioepistemología, no perdemos de vista los elementos de la educación estocástica inmersos en el diseño y que resultan importantes para la reflexión. En este sentido, la implementación y el análisis permitirán ampliar el modelo epistemológico basado en prácticas y con ello ir delimitando una teoría de dominio específico sobre la organización de la actividad estocástica relativa a la inferencia bayesiana para el caso binomial en estudiantes de bachillerato.

Referencias

Ainley, J. & Pratt, D. (2001). Introducing a special issue on constructing meanings from data. *Educational Studies in Mathematics*, *45*(1), 1-8. https://doi.org/10.1023/A:1013882709661

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, *76*, 55-67.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2011). La enseñanza de la estadística a través de escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *24*(40), 789-810.

Bakker, A. & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 5-26. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2011.538293

Bakker, A. & van Eerde, D. (2014). An introduction to Design-Based Research with an example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 429-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez L. & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. *A Framework for Statistics and Data Science Education*. American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Barragués, J. I. y Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de textos universitarios. Enseñanza de las Ciencias, 24(2), 241-256. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/75829

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. & Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 5-17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in High School*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Batanero C., Chernoff E. J., Engel J., Lee H. S. & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K. & Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 473-502). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_16

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. & Makar, K. (2012). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21

Borovcnik, M. (2012). Multiple Perspectives on the Concept of Conditional Probability. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 5- 27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1491–1516. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31495

Borovcnik, M. (2019). Informal and “Informal” Inference. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(1), 433-460. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p433-460

Borovcnik, M. (2021). Corner pillars of Probability Literacy. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 602-607). International Statistical Institute.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Budgett S. & Pfannkuch M. (2019). Visualizing Chance: Tackling Conditional Probability Misconceptions. En G. Burrill y D. Ben–Zvi (Eds.), *Topics and Trends in Current Statistics Education Research. ICME-13 Monographs* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_1

Burrill, G. (2023). An International Look at the Status of Statistics Education. En G. F. Burrill, L. de Oliveria Souza y E. Reston (Eds.), *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives. Advances in Mathematics Education* (pp. 11-16). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_2

Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 57-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Cantoral, R. (2020). Socioepistemology in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 790-797). Springer.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100041

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cárcamo, A. y Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *37*(76), 577-601. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 145-166. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.185

Carranza, P. (2009). *La dualite de la probabilite dans l'enseignement de la statistique. Une experience en classe de BTS* [Tesis de doctorado, Université Paris-Diderot]. HAL Thèses. https://theses.hal.science/tel-00458320

Carranza, P. (2014). Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en Francia. *Educação Matemática Pesquisa*, *16*(3), 1071-1087. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21597

Carranza, P. y Fuentealba, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *6*(24), 57-68. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/967

Chance, B. L. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 1-14. https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910677

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *23*, 1-23.

Cui, L., Lo, S. & Liu, Z. (2023). The Use of Visualizations to Improve Bayesian Reasoning: A Literature Review. *Vision*, *7*(1), 17. https://doi.org/10.3390/vision7010017

Devlin, K. (2014). The most common misconception about probability? En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp. IX-XIII). Springer.

Eichler, A., Böcherer-Linder, K. & Vogel, M. (2020). Different visualizations cause different strategies when dealing with Bayesian situations. *Frontiers in Psychology*, *11*, 1897. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01897

Estrella, S., Méndez-Reina, M. & Vidal-Szabó, P. (2023). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *SERJ – Statistics Education Research Journal*, *22*(2), Article 10. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). International Statistical Institute.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. En R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education: The Teaching of Statistics* (pp. 175-184). Unesco.

Figueroa, S. M. y Distéfano, M. L. (2023). Estrategia para la enseñanza de la inferencia en Ingeniería: fundamentos para su diseño. *Revista de Educación Estadística*, *2*(1), 1-28. https://doi.org/10.29035/redes.2.1.7

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística, Reporte (GAISE)*. American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/Spanish.pdf

Gal, I. (2002). Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review*, *102*(4), 684-704. https://doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203088364

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *ESM – Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205. https://doi.org/10.1007/BF00302543

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: What natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, *84*(3), 343-352. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(02)00050-1

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 87-106. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.188

Inzunza Cazares, S. y Rocha Ruiz, E. (2021). Los datos y el azar en el currículo de educación básica y bachillerato en México: reflexiones desde la perspectiva internacional. *Diálogos sobre Educación. Temas actuales en Investigación Educativa*, *12*(23), 00028. https://doi.org/10.32870/dse.vi23.717

Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a Connection Between Experimental and Theoretical Aspects of Probability. *IEJME – International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339-370. https://doi.org/10.29333/iejme/244

Kaplar, M., Lužanin, Z., & Verbić, S. (2021). Evidence of probability misconception in engineering students—why even an inaccurate explanation is better than no explanation. *International Journal of STEM Education*, *8*(18), 1–15. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00279

Kazak, S. (2015). 'How confident are you?' Supporting Young Students' Reasoning about Uncertainty in Chance Games through Students' Talk and Computer Simulations. En A. Zieffler y E. Fry (Eds.), *Reasoning about uncertainty: learning and teaching informal inferential reasoning* (pp. 29-55). Catalyst Press.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 68-86. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299

León, N. A. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al Teorema de Bayes: Un Caso con Futuros Profesores de Matemática. *Paradigma*, *29*(2), 187-219. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2008.p187-219.id420

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 74-101). National Council of Teachers of Mathematics.

Lonjedo Vicent, M. A., Huerta Palau, M. P. y Carles Fariña, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(3), 319-337.

Lonjedo, M. A. y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 261-269). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Makar, K., & Ben-Zvi, D. (2011). The Role of Context in Developing Reasoning about Informal Statistical Inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*, 1-4. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538291

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *SERJ – Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82-105. https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457

Mandel, D. R. (2014). The psychology of Bayesian reasoning. *Frontiers in Psychology*, *5*, 1144. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.01144

Metz, M. L. (2010). Using GAISE and NCTM Standards as Frameworks for Teaching Probability and Statistics to Pre-Service Elementary and Middle School Mathematics Teachers. *Journal of Statistics Education*, *18*(3), 1-27. https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889585

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Data Analysis and Probability. Standard for grades 9-12. En *Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 324-341). NCTM.

Öçal, M. F. (2018). The Case of Time Axis Fallacy: 11th Grade Students' Intuitively based Misconception in Probability and Teachers' Corresponding Practices. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *6*(3), 86-105. https://doi.org/10.14689/issn.2148-2624.1.6c3s4m

Paredes-Cancino, C. y Montiel-Espinosa, G. (en revisión). *Características y prácticas estocásticas asociadas a tareas bayesianas: un análisis en libros de texto del bachillerato mexicano*.

Paredes-Cancino, C. y Montiel-Espinosa, G. (en prensa). *Propuesta de un modelo epistemológico para la enseñanza de la inferencia bayesiana*. Bolema – Boletim de Educação Matemática.

Paredes-Cancino, C. y Montiel-Espinosa, G. (2023). Una caracterización de las prácticas estocásticas en el texto de Thomas Bayes (1763). En P. Scott, Y. Morales y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología* (Vol. 7, pp. 139-146). Comité Interamericano de Educación Matemática. https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen7-Tema-6.pdf

Paredes, C. (2018). *El problema de la inversión de la probabilidad. Génesis histórica y problematización del Teorema de Bayes* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*, 27-46. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302

Rivadulla, A. (1995). Historia y epistemología de los cambios de significado de probabilidad. *AGORA: Papeles de Filosofía*, *14*(1), 53-75.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D. y Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *44*(1), 135-156. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: a statistician's view. *SERJ – Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7(2)_Rossman.pdf

Schatzki, T. (2001). Introduction: practice theory. En T. Schatzki, K. K. Cetina y E. Savigny (Eds.), *The practice turn in contemporary theory* (pp. 10-23). Routledge.

Schatzki, T. (2017). Practices and Learning. En P. Grootenboer, Ch. Edwards-Groves y S. Choy (Eds.), *Practice Theory Perspectives on Pedagogy and Education* (pp. 23-43). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-3130-4_2

Secretaria de Educación Pública (2017). *Planes de estudio de referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. SEP.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, *185*(4157), 1124-1131. https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124

Vancsó, O., Borovcnik, M. & Fejes-Tóth, P. (2021). A complex concept about statistical inference and a planned school experiment based on it. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 596-601). International Statistical Institute. https://www.isi-web.org/sites/default/files/import/pdf/154-day3-ips078-a-complex-concept-about-statis.pdf

Vásquez, C. y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación Matemática*, *34*(2), 245-274. https://doi.org/10.24844/EM3402.09

Watson, A. & Ohtani, M. (2015). *Task Design in Mathematics Education*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and Goals*. Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9780203053898

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999), Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x